BULLETIN
DE
L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Rédacteur en chef
K. KURATOWSKI

Rédacteur en chef suppléant
L. INFELD

SÉRIE DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES

Rédacteur de la Série
A. MOSTOWSKI

Comité de Rédaction de la Série
K. BORSUK, W. IWANOWSKA, A. JABŁOŃSKI, W. RUBINOWICZ
A. SOŁTAN

VOLUME VII
NUMERO 12

VARSOVIE 1959

PRINTED IN POLAND

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE – WARSZAWA, MIODOWA 10

Nakład 1132 + 118 egz.	*Rękopis dostarczono 2. XI. 1959*
Ark. wyd. 3 – ark. druk. 3 1/2	*Podpisano do druku 14. I. 1960*
Papier druk. sat. 80 gr. kl. III	*Druk ukończono w styczniu 1960*
Format B5, 70×100 cm	*Zam. prod. 701/59 Cena zł 20.–*

DRUKARNIA UNIWERSYTETU JAGIELLOŃSKIEGO W KRAKOWIE

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 12, 1959

MATHEMATICS

On the Sets of Quasi-Components

by

S. MRÓWKA

Presented by K. KURATOWSKI on September 29, 1959

This paper contains a solution of a problem, raised by K. Kuratowski, which can be shortly formulated as follows: *can the class of all quasi-components of a set A, lying in a locally connected separable metric space, be represented as the inverse limit of the classes of components of all open super-sets of A?*

We give an exact formulation of this problem (the class of all quasi-components of a space S will be denoted as $\mathfrak{C}(S)$; of course, if G is an open subset of a locally connected space, then $\mathfrak{C}(G)$ coincides with the class of all components of G).

Let X be a locally connected separable metric space and let $A \subset X$. Denote as $\mathfrak{G}$ the class of all open subsets of X containing A. $\mathfrak{G}$ will be considered as a directed set with $G_1 \prec G_2$ equivalent to $G_1 \supset G_2$. Let $g_{G_2}^{G_1}$, for $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$, $G_1 \supset G_2$, be the mapping of $\mathfrak{C}(G_2)$ into $\mathfrak{C}(G_1)$ which assigns to each $R \in \mathfrak{C}(G_2)$ the only component of G_1 which contains R.

Let us consider the inverse limit $\mathfrak{L} = \operatorname{Lim}_{G \in \mathfrak{G}} [\mathfrak{C}(G), g_{G_2}^{G_1}]$. Elements of this limit are, by definition, functions f defined on $\mathfrak{G}$ which satisfy the following conditions:

$$f(G) \in \mathfrak{C}(G)\,, \tag{1}$$

$$f(G_1) = g_{G_2}^{G_1}\big(f(G_2)\big) \quad \text{for} \quad G_2 \subset G_1\,. \tag{2}$$

But, assuming condition (1), we may easily show, that condition (2) is equivalent to the following

$$f(G_2) \subset f(G_1) \quad \text{for} \quad G_2 \subset G_1\,. \tag{2'}$$

There is a natural mapping Φ of $\mathfrak{C}(A)$ into $\mathfrak{L}$; namely the mapping which assigns to each $R \in \mathfrak{C}(A)$ the element $f \in \mathfrak{L}$ such that $f(G) =$ *the only component of G which contains R*. It may be easily checked that Φ is an one-to-one mapping and Kuratowski asks: is Φ a mapping *onto* $\mathfrak{L}$?

Kuratowski has remarked that this problem may be reduced to the following

LEMMA. *If* $f \in \mathfrak{L}$, *then* $\bigcap\{f(G): G \in \mathfrak{G}\} \cap A \neq 0$.

Indeed, assume that the lemma holds. Let $f \in \mathfrak{L}$. Then

$$\bigcap\{f(G): G \in \mathfrak{G}\} \cap A = \bigcap\{f(G) \cap A: G \in \mathfrak{G}\} \neq 0 .$$

But $f(G)$, as a component of an open subset of a locally connected space, is both closed and open in G, hence $f(G) \cap A$ is both closed and open in A. Consequently, $\bigcap\{f(G) \cap A: G \in \mathfrak{G}\}$ contains a quasi-component R of A. Of course, $R \subset f(G)$ for each G in $\mathfrak{G}$, thus, by the definition of Φ, $\Phi(R) = f$.

It remains to show the lemma.

Proof of the lemma. Assume $\bigcap\{f(G): G \in \mathfrak{G}\} \cap A = 0$. We assert that:

(i) *There exists a sequence* $G_1, G_2, \ldots$ *of members of* $\mathfrak{G}$ *with*

$$G_1 \supset G_2 \supset \ldots, \tag{3}$$

and

$$\bigcap_n f(G_n) \cap A = 0 . \tag{4}$$

Indeed, let $U_1, U_2, \ldots$ be a basis of open sets of the space X and denote by $U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots$ those sets for which there is G_n in $\mathfrak{G}$ with $f(G_n^*) \cap U_{k_n} = 0$. If p is any point of A, then there exists G in $\mathfrak{G}$ with $p \bar{\in} f(G)$. But $p \in G$ and $f(G)$ being a component of G we have $p \bar{\in} \overline{f(G)}$, hence, there is U_{n_0} with $p \in U_{n_0}$ and $f(G) \cap U_{n_0} = 0$. This shows that U_{n_0} is a member of the sequence $U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots$. Thus, the sets $U_{k_1}, U_{k_2}, \ldots$ form a covering of A and it follows that $\bigcap_n f(G_n^*) \cap A = 0$. Setting $G_n = G_1^* \cap \ldots \cap G_n^*$, we see that the sequence $G_1, G_2, \ldots$ satisfies the conditions (3) and (4).

(ii) *Setting*

$$H_n = \left(X \setminus \overline{f(G_n)}\right) \cup f(G_n) \tag{*}$$

we have

$$H_n \in \mathfrak{G} \tag{5}$$

and

$$f(H_n) = f(G_n) . \tag{6}$$

Indeed, each point $p \in G_n$ which does not belong to $f(G_n)$, belongs to $X \setminus \overline{f(G_n)}$, hence $G_n \subset H_n$. Thus $A \subset H_n$ and $H_n \in \mathfrak{G}$. Moreover, we infer from condition (2) that $f(G_n) \subset f(H_n)$. But $X \setminus f(G_n)$ and $f(G_n)$ are disjoint open sets, and it follows that $f(H_n) = f(G_n)$.

(iii) *Setting*

$$(**) \qquad H = \left(X \setminus \overline{f(G_1)}\right) \cup \left(f(G_1) \setminus \overline{f(G_2)}\right) \cup \left(f(G_2) \setminus \overline{f(G_3)}\right) \cup \ldots$$

we have

$$(7) \qquad H \in \mathfrak{G},$$

and

$$(8) \qquad H \subset H_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Indeed, let p be any point of A. Since $\bigcap_n f(H_n) \cap A = 0$, one can find an index n_0 with $p \bar{\in} f(H_n)$; let n_0 be the least such index. Then $p \bar{\in} \overline{f(H_{n_0})}$, thus $p \in X \setminus \overline{f(H_1)}$ if $n_0 = 1$, and $p \in f(H_{n_0-1}) \setminus \overline{f(H_{n_0})}$ if $n_0 > 1$. This shows that $A \subset H$, hence $H \in \mathfrak{G}$. On the other hand, from (2'), (3) and (6) we infer that

$$f(H_m) \supset f(H_n) \quad \text{for} \quad m \leqslant n,$$

hence

$$X \setminus \overline{f(H_m)} \subset X \setminus \overline{f(H_n)} \quad \text{for} \quad m \leqslant n,$$

thus, in particular,

$$(9) \qquad X \setminus \overline{f(H_1)} \subset X \setminus \overline{f(H_n)}, \quad f(H_{m-1}) \setminus \overline{f(H_m)} \subset X \setminus \overline{f(H_n)} \quad \text{for} \quad m \leqslant n.$$

Similarly, since

$$f(H_m) \subset f(H_n) \quad \text{for} \quad m \geqslant n,$$

we have

$$(10) \qquad f(H_m) \setminus \overline{f(H_{m+1})} \subset f(H_n) \quad \text{for} \quad m \geqslant n.$$

Taking into account (*) and (**) we infer from (9) and (10) that $H \subset H_n$.

Now with the decrease of the sequence $f(H_1), f(H_2)\ldots$ the summands in the union (**) are mutually disjoint. It follows that $f(H)$ is contained in one of these summands, consequently $f(H) \cap f(H_n) = 0$ for some n. It follows, however, from (8) that $f(H) \subset f(H_n)$ for each n and this leads to a contradiction.

Thus the lemma is proved.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN)

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 12, 1959

MATHEMATICS

A Note on the Marcinkiewicz-Orlicz Space

by

WANG SHENG-WANG

Presented by W. ORLICZ on September 21, 1959

It is the purpose of this note to investigate the Marcinkiewicz-Orlicz space [4] under the Stepanov norm.

Let $M(u)$ and $N(v)$ be two N-functions complementary to each other ([1] or [2]). We denote by L_{SN} the class of real or complex functions $U(t)$ satisfying

$$d(u;N) = \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{l} \int_x^{x+l} N(|u(t)|)\,dt < \infty, \tag{1}$$

where $l > 0$ is an arbitrary definite number. The class L_{SM} may be similarly defined by writing M instead of N. Of course, L_{SN} and L_{SM} are convex sets.

We are now going to define the space L^*_{SM} (and L^*_{SN}) in the usual way. All the real or complex functions $u(t)$ satisfying

$$\left\{ \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |u(t)v(t)|\,dt \right\} < \infty$$

constitute the space L^*_{SM} with the norm

$$\|u\|_{SM} = \sup_{d(v;N)\leqslant 1} \left\{ \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |u(t)v(t)|\,dt \right\}. \tag{2}$$

It is easy to prove that L^*_{SM} is a linear normed space. However, the norms (2) are not equal under different l. We can prove that they are equivalent. Let $l_1 > l_2$ and for some n, $nl_2 < l_1 \leqslant (n+1)l_2$; then

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{l_1} \int_x^{x+l_1} N(|v(t)|)\,dt \leqslant \frac{n+1}{n} \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{1}{l_2} \int_x^{x+l_2} N(|v(t)|)\,dt.$$

Writing $k_1 = \frac{n}{n+1}$, $k_2 = \frac{l_1}{l_2}$, we obtain

$$k_1 d_{l_1}(v; N) \leqslant d_{l_2}(v; N) \leqslant k_2 d_{l_1}(v; N), \tag{3}$$

where $d_l(v; N)$ denotes the number $d(v; N)$ under the length l. By some computation and by (3), we can prove

$$\sup_{d_{l_1}(v;N)\leqslant 1}\left\{\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1}|u(t)v(t)|\,dt\right\}\leqslant\frac{k_2}{k_1}\sup_{d_{l_2}(v;N)\leqslant 1}\left\{\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2}|u(t)v(t)|\,dt\right\}.$$

Similarly, we can prove

$$\sup_{d_{l_2}(v;N)\leqslant 1}\left\{\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{1}{l_2}\int_x^{x+l_2}|u(t)v(t)|\,dt\right\}\leqslant\frac{k_2}{k_1}\sup_{d_{l_1}(v;N)\leqslant 1}\left\{\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{1}{l_1}\int_x^{x+l_1}|u(t)v(t)|\,dt\right\},$$

hence $\frac{k_1}{k_2}\|u\|_{SM}^{l_1} \leqslant \|u\|_{SM}^{l_2} \leqslant \frac{k_2}{k_1}\|u\|_{SM}^{l_1}$. Therefore, in the sequel we shall put $l = 1$.

THEOREM 1 *). *The space L_{SM}^* is complete.*

THEOREM 2. *The space L_{SM}^* is inseparable.*

The proof of the above two theorems is identical with that of the same theorem for the space S^p [3].

THEOREM 3. *In order that $L_{SM} \subset L_{SM_1}$, it is necessary and sufficient that the following inequality*

$$M_1(u) \leqslant kM(u)$$

be fulfilled for $u \geqslant u_0$, where $k \geqslant 0$, $u_0 \geqslant 0$ are some definite numbers.

The proof of sufficiency is evident and the proof of necessity is identical with that for the relation $L_M \subset L_{M_1}$ [2].

THEOREM 4. *In order that $L_{SM}^* \subset L_{SM_1}^*$, it is necessary and sufficient that the following inequality*

$$M_1(u) \leqslant M(ku) \tag{4}$$

be fulfilled for $u \geqslant u_0$, where $k > 0$, $u_0 \geqslant 0$ are some definite numbers.

THEOREM 5. *$L_{SM} = L_{SM}^*$ if and only if $M(u)$ satisfies the Δ_2-condition* (cf. [1] or [2]).

---

*) Theorems 1 to 5 have been obtained independently by J. Albrycht and have been presented at the Conference of Functional Analysis held in January 1956 in Zakopane. These results were submitted this year for publication in Prace Matematyczne (Mathematical Papers) and will appear under the title: *Some Remarks on the Marcinkiewicz-Orlicz Spaces* IV (in Polish).

From Theorem 5 we know that the necessary and sufficient condition for L_{SM} to be linear is that $M(u)$ should satisfy the Δ_2-condition. Furthermore, if (4) is satisfied, then

$$\|u\|_{SM_1} \leqslant \|u\|_{SM}$$

and *vice versa.*

DEFINITION. *Let E be an arbitrary measurable set contained in $(-\infty, \infty)$, If, for every $\varepsilon > 0$, there is a $\delta > 0$ such that*

$$\|uX_E\|_{SM} < \varepsilon$$

when $\sup\limits_{-\infty<x<\infty} \{\operatorname{mes} E \cap (x, x+1)\} < \delta$, *we shall say that $u(t)$ has an absolutely continuous norm (here $x_E(t)$ is a characteristic function of E).*

THEOREM 6. *The necessary and sufficient condition for $u(t)$ to have an absolutely continuous norm, is the existence of a sequence of bounded functions $u_n(t)$ such that*

$$\|u - u_n\|_{SM} \to 0 .$$

Proof. The sufficiency is evident.

Necessity. Let

$$u_n(t) = \begin{cases} u(t) & \text{when} \quad |u(t)| \leqslant n\|u\|_{SM} , \\ 0 & \text{when} \quad |u(t)| > n\|u\|_{SM} ; \end{cases}$$

then,

$$| \geqslant \int_x^{x+1} M\left(\frac{|u(t)|}{\|u\|_{SM}}\right) dt \geqslant \int_x^{x+1} M\left(\frac{|u(t)-u_n(t)|}{\|u\|_{SM}}\right) dt \geqslant M(n) \operatorname{mes} E_n \cap (x, x+1) ,$$

where $E_n = \{t; t \in (-\infty, \infty), |u(t)| > n\|u\|_{SM}\}$.

Since x is arbitrary, then

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \{\operatorname{mes} E_n \cap (x, x+1)\} \leqslant \frac{1}{M(n)} ,$$

and, therefore, from the hypothesis on $u(t)$, it follows that

$$\|u - u_n\|_{SM} \to 0 .$$

The theorem is thus proved.

We shall denote by E_{SM} the class of all the functions having an absolutely continuous norm. Evidently, E_{SM} is a subspace of L^*_{SM}. If $\pi(E_{SM}; \gamma)$ denotes the class of all the functions $u(t)$ which are at a distance from E_{SM} lesser than γ, then we have

THEOREM 7. $\pi(E_{SM}: 1) \subset L_{SM}$.

However, in the relation $L_{SM} < \pi(E_{SM}; 1)$, the closure of $\pi(E_{SM}; 1)$ does not hold in general. In fact, defining the following function *)

$$u(t) = \begin{cases} 2M^{-1}(n) & \text{when} \quad t \in \left[zn, zn + \frac{1}{n}\right] \quad n \neq 1, \neq 2, \ldots, \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

we can easily prove, for every bounded function $v(t)$, $d\left(\frac{u}{2} - v; M\right) = 1$. If $u(t) \in \pi(E_{SM}; 1)$, then $\frac{u(t)}{2} \in \pi(E_{SM}; 1)$, hence there exists a bounded function $v(t)$ such that

$$\left\| \frac{u}{2} \right\|_{SM} < 1,$$

therefore, $d\left(\frac{u}{2} - v; M\right) \leqslant \left\| \frac{u}{2} - v \right\|_{SM} < 1$. This contradiction shows the truth of the above supposition.

The theory of the space L^*_{SM} shall be considered further in our next paper.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NANKING UNIVERSITY, CHINA

REFERENCES

[1] Z. M. Birnbaum, W. Orlicz, *Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen*, Stud. Math. **3** (1931), 1.

[2] M. A. Krasnoselsky, *Convex functions and Orlicz Spaces* (in Russian), Gestechizdat, Moscow, 1958.

[3] B. M. Levitan, *Almost periodical functions* (in Russian), Gestechizdat, Moscow, 1953.

[4] J. Albrycht, *Some remarks on the Marcinkiewicz-Orlicz space*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, **4** (1956), 1.

*) Here we suppose that $M(u)$ satisfies the Δ_2-condition.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 12, 1959

MATHÉMATIQUE

Propriétés d'une classe de fonctions holomorphes aux fonctions limites discontinues

par

W. POGORZELSKI

Présenté par T. WAŻEWSKI le 13 octobre 1959

Introduction

Soit dans le plan de la variable complexe un domaine S^+ limité par les courbes fermées $L_0, L_1, \ldots, L_n (n \geqslant 0)$. On admet que les courbes $L_1, \ldots, L_n$ limitent les domaines bornés disjoints $S_1^-, \ldots, S_n^-$ et que la courbe L_0 embrasse toutes les courbes $L_1, \ldots, L_n$. Nous désignerons par S_0^- le domaine non borné, situé à l'extérieur de la courbe L_0, par L et S^- — les sommes d'ensembles de points suivantes

$$L = L_0 + L_1 + \ldots + L_n ,$$

$$S^- = S_0^- + S_1^- + \ldots + S_n^- .$$

Remarquons que la courbe L_0 peut ne pas exister; dans ce cas le domaine S^+ s'étendra à l'infini. Nous admettons que les lignes $L_0, \ldots, L_n$ ont des tangentes continues en tout point, à l'exception d'une suite finie de points $c_1, c_2, \ldots, c_p$ situés sur une au moins des lignes $L_0, \ldots, L_n$, qui sont des points anguleux ou de rebroussement. On admet ensuite que le sens positif des lignes $L_1, \ldots, L_n$ est en accord avec le sens négatif de rotation dans le plan de la variable complexe et que le sens positif de la ligne L_0 est en accord avec le sens positif sur ce plan. Les définitions et les propriétés des fonctions que nous présenterons dans la présente note, sont basées sur les définitions et les propriétés des fonctions complexes discontinues de classe $\mathfrak{H}_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ que nous avons donné dans notre travail antérieur [1]. A présent nous introduirons une petite modification généralisant la définition des fonctions $\varphi(t)$ de classe $\mathfrak{H}_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$. Nous supposons notamment que ces fonctions $\varphi(t)$ sont bornées ou presque bornées aux voisinages des points de discontinuité $c_{k_1}, \ldots, c_{k_q}$,

c. à. d. qu'elles vérifient les inégalités

$$|\varphi(t)| < \text{const} \prod_{\nu=1}^{p} |t-c_\nu|^{-\varrho_\nu}, \tag{1}$$

$$|\varphi(t)-\varphi(t_1)| < \text{const}\,|t-t_1|\,|t-c_\nu|^{-\varrho_\nu-h}\,|t_1-c_{\nu'}|^{-\varrho_{\nu'}-h},$$

où $\varrho_\nu = 0$, ou bien ϱ_ν designe un nombre positif arbitrairement petit, si $\nu = k_1, \ldots, k_q$ et où $\varrho_\nu = \alpha > 0$ pour les autres points de discontinuité. Cette généralisation introduit une plus grande symétrie des propriétés.

Définitions et propriétés

Définition 1. *Nous appelons classe H_α^h un ensemble de toutes les fonctions $\Phi(z)$, holomorphes ou séparément holomorphes dans les domaines $S^+, S_0^-, S_1^-, \ldots, S_n^-$, dont les fonctions limites*

$$\Phi^{\pm}(t) = \lim_{z \to t} \Phi(z); \quad (t \neq c_\nu) \tag{2}$$

sont de classe $\mathfrak{H}_\alpha^h$ sur l'ensemble L et qui vérifient l'inégalité à singularité faible

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c_\nu|^\theta} \tag{3}$$

aux voisinages de tous points de discontinuité c_ν; θ est un nombre positif inférieur à l'unité, non fixé.

Propriété 1. La classe H_α^h est un sous-ensemble de la classe $H_{\alpha_1}^{h_1}(\alpha_1+h_1<1)$ si $\alpha \leqslant \alpha_1, h_1 \leqslant h$.

Propriété 2. Toute fonction de classe H_α^h s'exprime par sa fonction limite, par la formule

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau)\,d\tau}{\tau - z}, \tag{4}$$

si $z \in S^+$, et par la formule

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^-(\tau)\,d\tau}{\tau - z} + \Phi(\infty)\,\varepsilon_j, \tag{4'}$$

si $z \in S_j^-$, $(\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 0)$.

Définition 2. *Nous appelons classe $H_\alpha^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})(\alpha > 0)$ un ensemble de toutes les fonctions $\Phi(z)$ de classe H_α^h dont les fonctions limites $\Phi^{\pm}(t)$ appartiennent à la classe $\mathfrak{H}_\alpha^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$.*

Propriété 3. Toute fonction $\Phi(z)$ de classe $H_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ vérifie aux voisinages des points de discontinuité c_ν une inégalité

$$|\Phi(z)| < \text{const}\,|z-c_\nu|^{-\varrho_\nu}, \tag{5}$$

où $\varrho_\nu = a$, si $\nu \neq k_1, \ldots, k_q$, et ϱ_ν est un nombre positif arbitrairement petit, si $\nu = k_1, \ldots, k_q$.

Propriété 4. Si la fonction $\varphi(t)$, définie sur L, est de classe $\mathfrak{H}_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})(a > 0)$, alors la fonction définie par l'intégrale

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - z} \tag{6}$$

pour $z \in S^+ + S^-$, appartient à la classe $H_a^h(c_{k_1} \ldots c_{k_q})$.

Propriété 5. Pour que la fonction $\varphi(t)$ de classe $\mathfrak{H}_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ $(a > 0)$ soit une fonction limite d'une fonction holomorphe dans S^+ de classe $H_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ (nulle à l'infini dans le cas de l'absence du contour L_0) il faut et il suffit que la fonction donnée $\varphi(t)$ vérifie une équation intégrale

$$-\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = 0 \tag{7}$$

en tout point t sur L différent des points $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$.

Propriété 6. Si la dérivée d'une fonction $\Phi(z)$, holomorphe séparément dans les domaines S^+, S_0^-, S_1^-, ..., S_n^-, appartient à la classe H_a^h, alors la fonction $\Phi(z)$ elle-même admet les valeurs limites $\Phi^\pm(t) = \lim\limits_{z \to t} \Phi(z)$ en tout point t des courbes L de leurs deux côtés, même aux points de discontinuité $c_1, c_2, \ldots, c_p$, et les fonctions limites vérifient une condition de Hölder

$$|\Phi^\pm(t_1) - \Phi^\pm(t_2)| < \text{const}\,|t_1 - t_2|^\theta \tag{8}$$

pour tous les points des lignes L, où $\theta = 1 - a$ si $a > 0$ et θ est un nombre positif arbitraire, inférieur à l'unité, si $a = 0$.

Propriété 7. Si la fonction $\varphi(t)$, définie sur L, est de classe $\mathfrak{H}_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, alors toutes les fonctions $\Phi(z)$ de classe $H_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ pour lesquelles la différence des valeurs limites à une valeur donnée

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t)$$

en tout point $t \neq c_\nu$ sur L, sont exprimées par la formule

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - z} + P(z), \tag{9}$$

où $P(z)$ est une fonction entière arbitraire.

Propriété 8. Si S^+ est un domaine borné limité par une seule courbe fermée L (dont les directions des tangentes vérifient une condition de Hölder à l'exposant h_L), alors toute fonction $\Phi(z)$ holomorphe dans le domaine S^+, appartenant à la classe $H_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ relativement aux points de discontinuité $c_1, \ldots, c_p$ sur L, peut être exprimée d'une façon unique par la formule intégrale

$$\Phi(z) = \int_L \frac{\mu(\tau)\,d\sigma}{1-\frac{z}{\tau}} + iC, \tag{10}$$

où $\mu(\tau) \in \mathfrak{H}_a^{h_1}(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ est une fonction réelle définie sur L, C est une constante réelle, $d\sigma$ désigne élément de l'arc L au point τ; l'origine $z = 0$ se trouve à l'intérieur du domaine S^+, on a désigné $h_1 = \min(h, h_L)$.

Propriété 9. Si la dérivée d'ordre $m(\geqslant 1)$ d'une fonction $\Phi(z)$, holomorphe dans le domaine S^+ appartient à la classe $H_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$ relativement aux points de discontinuité $c_1, \ldots, c_p$ sur L (en conservant les supposition précédentes) alors on peut représenter d'une façon unique cette fonction par la formule intégrale de Vecoua [2]:

$$\Phi(z) = \int_L \mu(\tau)\left(1-\frac{z}{\tau}\right)^{m-1} \log\left(1-\frac{z}{\tau}\right) d\sigma + \int_L \mu(\tau)\,d\sigma + iC, \tag{11}$$

où $\mu(\tau)$ est une fonction réelle de classe $\mathfrak{H}_a^{h_1}(c_{k_1}, \ldots c_{k_q})$. C est une constante réelle et l'on a choisi une telle branche continue de la fonction logarithmique qui s'annule au point $z = 0$, situé à l'intérieur de S^+.

Les démonstrations de ces propriétés seront publiées dans un travail qui paraîtra sous le même titre dans le journal Annales Polonici Mathematici.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] W. Pogorzelski, *Problèmes aux limites discontinues dans la théorie des fonctions analytiques*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci math., astr. et phys. **7** (1959), 311; Jour. of Math. and Mech., Indiana University, 1960.

[2] I. N. Vécoua, *Sur nouvelle représentation intégrale des fonctions analytiques* (en russe), Comptes Rendus de l'Acad. Georg. des Sciences, **2** (1941), 477-484.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 12, 1959

MATHÉMATIQUE

Une simple démonstration du théorème de Titchmarsh sur la convolution

par

J. MIKUSIŃSKI

Présenté par K. KURATOWSKI le 16 octobre 1959

1. Il s'agit du théorème suivant:

THÉORÈME. *Si $f(t)$ et $g(t)$ sont deux fonctions continues dans $[0, T]$ et si*

$$\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = 0 \tag{1}$$

dans $[0, T]$, alors il existe deux nombres non négatifs t_1 et t_2 tels que $t_1+t_2 \geqslant T$ et $f(t) = 0$ dans $[0, t_1]$ et $g(t) = 0$ dans $[0, t_2]$ *)

La démonstration que nous allons donner est à la fois plus simple et plus élémentaire que les démonstrations antérieures ([1]-[4], p. 385-398, [7]).

2. Nous introduirons les notations suivantes: la convolution de f et g sera designée par fg, le produit ordinaire de f par la variable t sera désigné par f'. Céci posé, on vérifie sans peine que

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Donc, dans notre notation, la multiplication par t jouit de la propriété de dérivation.

Toutes les fonctions considérées dans la suite seront supposées continues.

---

*) Le théorème est valable aussi pour les fonctions localement sommables. Une telle généralisation n'est pas toutefois essentielle, car dans ce cas-là l'égalité (1) entraîne la même égalité pour les intégrales $f_1(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$ et $g_1(t) = \int_0^t g(\tau)\,d\tau$ qui sont évidemment des fonctions continues. Ainsi le théorème peut être réduit toujours au cas des fonctions continues.

On a la proposition suivante:

(I) *Si* $f^2 = 0$ *dans* $[0, T]$, *on a* $f = 0$ *dans* $[0, \frac{1}{2}T]$.

Cette proposition est un cas particulier du Théorème qui s'obtient en posant $f = g$. D'autre part, (I) se laisse démontrer sans peine directement (voir p. ex. [6], p. 20-22). Nous démontrerons dans le § 3 qu'il est possible de déduire, réciproquement, le Théorème, de la proposition en s'appuyant sur le lemme suivant:

(II) Lemme. *Si* $f \cdot g^{(n)} = 0$ *dans* $[0, T]$, *alors il existe deux nombres* t_1 *et* t_2 *tels que* $t_1 + t_2 \geqslant T$ *et que* $f = 0$ *dans* $[0, t_1]$ *et* $g = 0$ *dans* $[0, t_2]$.

Démonstration de (II). La forme explicite de légalité $fg^{(n)} = 0$ est

$$\int_0^t \tau^n f(t-\tau) g(\tau)\, d\tau = 0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant T).$$

En vertu du théorème bien connu de Lerch, il s'ensuit que

$$f(t-\tau)g(\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t \leqslant T,$$

c'est-à-dire

$$f(\sigma)g(\tau) = 0 \quad \text{pour} \quad \sigma \leqslant 0, \quad \tau \geqslant 0, \quad \sigma + \tau \leqslant T$$

Si $[0, t_1]$ est le plus grand intervalle, où $f = 0$, on voit que $g = 0$ dans $[0, T - t_1]$, ce qui achève la demonstration de (II).

3. Démonstration du Théorème. En vertu du lemme (II) il suffit de démontrer le lemme suivant

(III) Lemme. $fg = 0$ *dans* $[0, T]$ *entraîne* $fg' = 0$ *dans* $[0, T]$.

Soit α le plus grand nombre $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$ tel que, pour toutes f et g, l'égalité

$$fg = 0 \quad \text{dans} \quad [0, T] \tag{2}$$

entraîne

$$fg' = 0 \quad \text{dans} \quad [0, \alpha T]. \tag{3}$$

(Le nombre α ne dépend évidemment pas de T). La convolution étant commutative, (2) entraîne encore

$$f'g' = 0 \quad \text{dans} \quad [0, \alpha^2 T]. \tag{4}$$

Nous profiterons encore de l'égalité

$$f'g + fg' = 0 \quad \text{dans} \quad [0, T], \tag{5}$$

qui resulte aussitôt de (2).

Prolongeons maintenant les fonctions f et g en dehors de $[0, T]$ d'une manière quelconque (pourvu que f et g restent continues). Cela étant, les égalités (3) et (5) entraînent

$$fg'(f'g + fg') = 0 \quad \text{dans} \quad [0, T + \alpha T],$$

c'est-à-dire

$$fg \cdot f'g' + (fg')^2 = 0 \quad \text{dans} \quad [0, T + \alpha T]. \tag{6}$$

Or, en vertu de (2) et (4) le premier terme dans (6) est nul dans $[0, T+\alpha^2 T]$ ce qui entraîne

$$(fg')^2 = 0 \quad \text{dans} \quad [0, T + \alpha^2 T].$$

En tenant compte de la proposition (I) il s'ensuit que

$$fg' = 0 \quad \text{dans} \quad \left[0, \frac{1+\alpha^2}{2} T\right].$$

D'après la definition de α, on a

$$\frac{1+\alpha^2}{2} \leqslant \alpha,$$

d'où $(1-\alpha)^2 \leqslant 0$ et $\alpha = 1$.

Ainsi, le lemme III et le Théorème se trouvent démontrés.

4. Lorsqu'on remplace l'intervalle fini $[0, T]$ par l'intervalle infini $[0, \infty]$, le raisonnement est un peu plus simple, comme C. Ryll-Nardzewski l'a montré en 1951 (voir [5] p. 18-19, [6] p. 22-23).

On parvient alors à la proposition suivante:

Si $fg = 0$ *dans* $(0, \infty)$, *on a* $f = 0$ *dans* $[0, \infty]$ *ou* $g = 0$ *dans* $[0, \infty]$.

Cette proposition est d'ailleurs un corollaire immédiat du Théorème cité dans le § 1. Il est difficile de déduire, réciproquement, le Théorème de ce corollaire.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] M. M. Crum, *On the resultant of two functions*, Quart Jour. of Math., Oxford Series 12, **46** (1941), 108-111.

[2] J. Dufresnoy, *Sur le produit de composition de deux fonctions*, Comptes Rendus Ac. Sci., **225** (1947), 857-859.

[3] — *Autour du theorème de Phragmen-Lindelöf*, Bull. Sci. Math., **72** (1948), 17-22.

[4] J. Mikusiński, *A new proof of Titchmarsh's theorem on convolution*, Studia Math. **13** (1953), 56-58.

[5] — *Rachunek operatorów*, Monogr. Matem., Warszawa, 1953.

[6] — *Operational Calculus*, Pergamon Press, 1959.

[7] E. C. Titchmarsh, *The zeros of certain integral functions*, Proc. Lond. Math. Soc., **25** (1926), 283-302.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 12, 1959

MATHÉMATIQUE

Le second théorème d'unicité de solution d'un système parabolique d'équations linéaires avec les coefficients höldériens

par

H. MILICER-GRUŻEWSKA

Présenté par K. KURATOWSKI le 26 octobre 1959

1. Le théorème d'unicité de solution du système parabolique d'équations linéaires à dérivées partielles et coefficients höldériens fût démontré [1] pour la classe Z_1 des solutions, qui avec leurs dérivées d'ordre ne surpassant pas celui du système, sont absolument intégrables dans l'espace -temps. L'espace-temps est ici le produit cartésien de l'espace euclidien E et d'un intervalle fini du temps ($0 \leqslant t \leqslant T$; $T = \text{const}$).

Il est évident que les constantes n'appartiennent pas à cette classe Z_1, même quand elles sont des solutions de chaque système d'équations dépourvues de termes linéaires. De même, l'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass, si importante dans l'étude des solutions du système parabolique, n'appartient pas à la classe Z_1. C'est pourquoi il fallait faire intervenir une classe de solutions du système parabolique, qui renfermerait les constantes et l'intégrale en question.

L'intégrale généralisée de Poisson-Weierstrass, ainsi que ses derivées spatiales jusqu'à l'ordre du système et sa dérivée par rapport au temps sont, comme on le sait, [3], bornées pour chaque temps positif, le moment initial du temps t, $(t = 0)$ étant le point de leur discontinuité faible, dès que la densité de l'intégrale en question est continue dans $[E \times \langle 0, T\rangle]$, bornée et höldérienne par rapport à la variable spatiale.

On démontrera dans le présent ouvrage que les solutions de ce genre forment une classe d'unicité (Z_1'). Il est évident qu'aucune des classes Z_1 et Z_1' n'est comprise dans l'autre.

Soit

$$N > 1, \quad M > 1, \quad k_1, \ldots k_n, \quad 0 \leqslant k_i \leqslant M, \quad i = 1, \ldots, n \quad k_1 + \ldots k_n = S$$

des entiers et:

$$(1) \qquad \hat{\psi}^{(a)}(u_1 \dots u_N) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N}^{0 \leqslant S \leqslant M} A_{aj}^{k_1 \dots k_n}(X, t) \frac{\partial^S u_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} - \frac{\partial u_a}{\partial t} = 0$$

$a = 1, \dots N$ — le système parabolique linéaire, $u_1(X, t) \dots, u_N(X, t)$; $X = X(x_1, \dots x_n)$; $X \in E$, $0 < t \leqslant T$ les composantes de la solution du système (1).

On suppose:

(Z_1') les dérivées spatiales d'ordre M au plus et la première dérivée par rapport au temps sont continues dans $[E \times (0, T)]$ et sont soumises aux conditions suivantes:

$$(2) \qquad |D_X^S[u_a(X, t)]| \leqslant \text{const}/t^{\mu_0}, \quad 0 \leqslant \mu_0 < 1, \quad S = 0, 1, \dots M$$

$$(3) \qquad |D_t[u_a(X, t)]| \leqslant \text{const}/t^{\mu_1}, \quad 0 \leqslant \mu_1 < 1, \quad a = 1, \dots N$$

(les constantes μ_0 ou μ_1 pour $S = M$ ne seront pas toujours arbitraires).

Les autres hypothèses de l'ouvrage [1] sont maintenues, à savoir:

(Z_2) Les coefficients du système (1) sont continus et bornés dans $[E \times \langle 0, T \rangle]$; tous ces coefficients sont höldériens par rapport à la variable spatiale X et les coefficients des dérivées d'ordre M sont, de plus, höldériens par rapport à la variable t.

(Z_3) Le système (1) est parabolique selon Petrovsky (v. [1]), c'est à dire les racines $\lambda_a(X, t)$ de l'équation de Petrovsky [1] sont soumises aux conditions suivantes:

$$(4) \qquad \operatorname{Re} \lambda_a(X, t) < -\delta, \quad \delta > 0, \quad a = 1, \dots N.$$

En modifiant un peu la démonstration donnée dans [1] on parvient au

SECOND THÉORÈME D'UNICITÉ. *Les solutions du système parabolique* (1), *à coefficients soumis aux hypothèses* (Z_2) *et* (Z_3), *qui appartiennent à la classe* Z_1', *et qui sont nulles au moment initial* $t = 0$ *sont toujours nulles* [4].

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] H. Milicer-Grużewska, *Le théorème d'unicité de solution d'un système parabolique d'équations linéaires avec les coefficients höldériens*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math. astron. et phys. **7** (1959), 593.

[2] W. Pogorzelski, *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivees partielles*, Ricerche Mat., **7** (1958), 153-185.

[3] — *Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Math. Scand., **6** (1958), 137-262.

[4] — *Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique*. Ann. Ec. Norm. **76** (1959), 125-149.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 12, 1959

MATHÉMATIQUE

Les propriétés probabilistes de la solution d'un système parabolique d'équations

par

H. MILICER-GRUŻEWSKA

Présenté par K. KURATOWSKI le 21 octobre 1959

1. Nous avons demontré [1], que la solution fondamentale normée de l'équation parabolique linéaire de second ordre aux coefficients höldériens, dépourvue du terme linéaire est une fonction de passage, c. à. d. une densité de la probabilité stochastique (de la probabilité de passage).

Quant au système parabolique d'équations de second ordre, on observe un fait pareil: les sommes des composantes des solutions fondamentales d'un tel système sont des fonctions de passage.

Soient:

E — l'espace euclidien à n dimensions: $X = X(x_1, \dots x_n)$;

t — la variable non négative et bornée ($0 \leqslant t \leqslant T$, $T = \text{const}$), dite le temps t.

$\mathcal{E} = (E \times \langle 0, T \rangle)$ leur produit cartésien, et:

(1,1)

$$\hat{\psi}^{(a)}(u_1, \dots u_N) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant N}^{0 < \mathcal{S} \leqslant 2} A_{aj}^{k_1 \dots k_n}(X,t) \frac{\partial^{\mathcal{S}} u_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \frac{\partial u_a}{\partial t} = 0\,, \quad a = 1 \dots N,\ N > 1$$

$$0 \leqslant k_i \leqslant 2,\ \mathcal{S} = k_1 + \dots + k_n\,, \quad X \in E\,, \quad 0 < t \leqslant T\,.$$

le système parabolique en question, où: $u_1(X,t), \dots u_N(X,t), (X,t) \in \mathcal{E}$ sont les composantes de sa solution: $(u_1, \dots u_N)$.

On suppose, comme dans le travail [3], que les coefficients du système sont soumis aux hypothèses suivantes:

I. Les coefficients du système (1,1) sont bornés et continus dans $\mathcal{E}$, ils sont, en outre, höldériens par rapport à la variable spatiale X, et les coefficients des dérivées de second ordre sont, de plus, höldériens par rapport au temps t.

II. Le système (1,1) est parabolique selon Petrovsky (voir p. ex. [3]) c. à. d. les racines $\lambda_\alpha(\alpha = 1, \dots N)$ de l'équation

$$(2,1)\quad \det_{\alpha,j}\Big|\sum_{\substack{0\leqslant k_i\leqslant 2\\ i=1,\dots,n}}^{\mathcal{S}=2} A_{\alpha j}^{k_1\dots k_n}(X,t)(is_1)^{k_1}\dots(is_n)^{k_n} - \delta_\alpha^j\lambda\Big| = 0\,, \qquad \delta_\alpha^j = \begin{cases} 0, & \alpha \neq j \\ 1, & \alpha = j \end{cases}$$

$$\mathcal{S} = k_1 + \dots + k_n\,.$$

ont des parties réelles verifiant l'inégalité

$$(3,1)\qquad \mathrm{Re}(\lambda_\alpha) < -\delta < 0\,;\ \alpha = 1, \dots N\,,$$

pour $s_1^2 + \dots + s_n^2 = 1$, $s_1, \dots s_n$ réels, et pour chaque $(X,t) \in \mathcal{E}$; δ étant une constante positive. Ces racines sont paires par rapport à toutes les variables $s_1, \dots s_n$. Outre cela, nous supposons qu'on a:

$$\text{III.}\quad \sum_{j=1}^{N} A_{\alpha j}^{k_1\dots k_n}(X,t) > 0\,, \qquad 0 \leqslant k_i \leqslant 2\,, \quad k_i \neq 1\,, \quad i = 1, 2, \dots n$$

$$k_1 + \dots + k_n = 2\,, \qquad (X,t) \in \mathcal{E}\,.$$

Soient

$$(4,1)\qquad (\Gamma_{\alpha 1}, \dots \Gamma_{\alpha N})_{\alpha=1\dots N}\,.$$

les N solutions fondamentales [3] du système (1,1).

Les sommes des composantes de ces solutions:

$$(5,1)\qquad P_\alpha(X,t;\,Y,\tau) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_{\alpha j}(X,t;\,Y,\tau)\,, \quad t < \tau$$

sont aussi les solutions du système (1,1), [3]. *Elles sont les fonctions de passage.* On démontre en effet que:

1) $P_\alpha(X,t;\,Y,\tau) \geqslant 0\,, \quad t < \tau$

2) $\int\limits_E P_\alpha(X,t;\,Y,\tau)\,dY \equiv 1\,, \quad t \leqslant \tau\,, \quad (X,t), (Y,\tau) \in \mathcal{E}$

3) $\int\limits_E P_\alpha(X,t;\,Z,\theta)\,P_\alpha(Z,\theta;\,Y,\tau)\,dZ \equiv P_\alpha(X,t;\,Y,\tau) \quad t < \theta \leqslant \tau \leqslant T\,,$
$\alpha = 1, \dots N$

On dit que les fonctions $P_\alpha(X,t;\,Y,\tau)$ sont *les fonctions de passage de l'état* (X,t) *vers l'état* (Y,τ).

Le système parabolique (1,1) permet donc de construire des champs simples de probabilités stochastiques [7].

La démonstration (par. 3) des égalités (2) et (3) découle facilement du théorème d'unicité [6]. Quant à l'inégalité (1), il faut démontrer (par. 4) que la fonction $P_\alpha(X,t;\,Y,\tau)$ est égale à la solution fondamentale d'une équation parabolique [2].

2. Rappelons la définition [3] des solutions fondamentales:

$$\{\Gamma_{\alpha\beta}\}_{\alpha=1,\dots,N}; \quad \beta = 1, \dots, N.$$

$$(1,2) \quad \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) = W_{\alpha\beta}^{Y\tau}(X, t; Y, \tau) + \int_t^\tau \int_E \sum_{\gamma=1}^N W_{\alpha\gamma}^{Z\theta}(X, t; Z, \theta) \Phi_{\gamma\beta}(Z, \theta; Y, \tau) dZ d\theta$$

$$\{W_{\alpha\beta}^{Z,\theta}(X, t; Z, \theta)\}_{\alpha=1,\dots,N}, \quad \beta = 1, \dots, N$$

sont ici les quasi-solutions du système (1,1). Ces dernières sont définies au moyen des solutions $\{v_\alpha^\beta\}_{\alpha=1,\dots,N}$ du système d'équations linéaires que voici:

$$(2,2) \quad \frac{dr_\alpha^\beta}{dt} = -\sum_{1 \le j \le N}^{S=2} A_{\alpha j}^{k_1,\dots,k_n}(Z, \zeta)(is_1)^{k_1}, \dots, (is_n)^{k_n} v_j^\beta(t, \tau; Z, \zeta; S),$$

$$S = (s_1, \dots, s_n) \in E$$

avec les conditions initiales:

$$(2',2) \quad v_\alpha^\beta(\tau, \tau; Z, \zeta; S) = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, N$$

comme il suit:

$$(3,2) \quad W_{\alpha\beta}^{Z,\zeta}(X, t; Y, \tau) = (2\pi\tau)^{-n} \int_E v_\alpha^\beta(t, \tau; Z, \zeta; S) e^{i \sum_{\nu=1}^n s_\nu (x_\nu - y_\nu)} dS,$$

$$dS = ds_1, \dots, ds_n; \quad Y = Y(y_1, \dots, y_n) \in E.$$

Les fonctions $\Phi_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)$ sont des solutions du système bien connu des équations intégrales [3].

On trouve les évaluations de toutes ces fonctions et leurs dérivées dans l'ouvrage [4]. Il nous sont nécessaires pour nos démonstrations.

3. On sait [8] que les intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass:

$$(1,3) \quad J_\alpha(X, t, \tau) = \int_E \sum_{\beta=1}^N \Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau) \varrho_\beta(Y, \tau) dY: \quad t < \tau, \quad \alpha = 1, \dots, N$$

sont les solutions du système (1,1) et que

$$(1',3) \quad \lim_{t \to \tau - 0} J_\alpha(X, t, \tau) = \varrho_\alpha(X, \tau), \quad \alpha = 1, \dots, N$$

si les densités $\varrho_\alpha(X, t)$ sont bornées et continues dans $\mathcal{E}$. Ces intégrales appartiennent à la classe d'unicité (Z_1'), ces densités étant höldériennes [6]. En conséquence du 2-nd théorème d'unicité en posant

$$\varrho_\alpha(Y, \tau) \equiv 1, \alpha = 1, \dots, N, \quad \text{ou} \quad \varrho_\beta(Z, \theta) = P_\alpha(Z, \theta; Y, \tau), \quad \beta = 1, \dots, N$$

on a identiquement:

$$(2,3)\qquad \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;\,Y,\tau)\,dY \equiv 1\,,\quad t \leqslant \tau\,,$$

où

$$(3,3)\qquad \int_E \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;\,Z,\theta)P_\alpha(Z,\theta;\,Y,\tau)\,dZ \equiv P_\alpha(X,t;\,Y,\tau)\,,\quad t<\theta<\tau$$

ce qui démontre les formules (2) et (3) du par. 1, eu égard à la définition (5,1).

4. On démontre le

THÉORÈME (1,4). *La fonction* $P_\alpha(X,t,\,Y,\tau)=u_\alpha$, $t<\tau$, *est une solution de l'équation parabolique, linéaire, à dérivées partielles de 2-nd ordre*

$$(1,4)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(\alpha)}(X,t)\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i^{(\alpha)}(X,t)\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0\,,\quad (\alpha=1,\ldots,N)$$

si les hypothèses I, II et III du par. 1 *sont admises et, si*

$$(1',4)\qquad \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-1}\int_E o(1)(x_i-y_i)(x_j-y_j)P_\alpha(X,t;\,Y,t+\Delta t)\,dY = 0$$

où $o(1)\to 0$, $|XY|\to 0$, *et:*

$$(1'',4)\qquad \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-1}\int_E (x_i-y_i)(x_j-y_j)P_\alpha(X,t;\,Y,t+\Delta t)\,dY = 2a_{ij}^{(\alpha)}(X,t);\quad i,j=1,\ldots,n\,.$$

Les coefficients $b_i^{(\alpha)}(X,t)$ seront précisés ailleurs (4,4). L'équation (1,4) est parabolique; on démontrera (par. 5) qu'il résulte de l'hypothèse III que

$$(1''',4)\qquad a_{ij}^{(\alpha)}(X,t) = \begin{cases} 0, & i\neq j \\ >0, & i=j \end{cases}.$$

En effet, il vient des égalités 2) et 3) du par. 1, que:

$$(2,4)\qquad [P_\alpha(X,t+\Delta t;\,Y,\tau)-P_\alpha(X,t;\,Y,\tau)]/\Delta t +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_\alpha}{\partial x_i}\right)_{(X,t)}(\Delta t)^{-1}\int_E (x_i-z_i)P_\alpha(X,t;\,Z,t+\Delta t)\,dZ +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 P_\alpha}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{(X,t)}(\Delta t)^{-1}\int_E (x_i-z_i)(x_j-z_j)P_\alpha(X,t;\,Z,t+\Delta t)\,dZ +$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}(\Delta t)^{-1}\int_E o(1)(x_i-z_i)(x_j-z_j)P_\alpha(X,t;\,Z,t+\Delta t)\,dZ = 0$$

où $o(1)\to 0$, $|XZ|\to 0$.

En supposant les égalités (1′,4) et (1″,4) et les hypothèses I et II, on peut écrire, [4], que:

$$(3,4)\qquad \frac{\partial P_a}{\partial t}+\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_a}{\partial x_i}\right)_{(X,t)}(\Delta t)^{-1}\int_E (x_i-z_i)P_a(X,t;Z,t+\Delta t)\,dZ+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^{(a)}(X,t)\frac{\partial^2 P_a}{\partial x_i\partial x_j}=0\,,\qquad \Delta t>0\,;\quad (a=1,\ldots,N)\,.$$

Les hypothèses I et II étant admises, on peut démontrer que l'existence de la limite de la somme de l'expression (3,4) entraîne l'existence des limites des composantes de cette somme. Nous ecrivons donc:

$$(4,4)\qquad \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-1}\int_E (x_i-z_i)P_a(X,t;Z,t+\Delta t)\,dZ=b_i(X,t)\qquad i=1,\ldots,n\,.$$

Les formules (3,4) et (4,4) prouvent le Théorème (1,4).

5. Pour démontrer que les égalités (1′,4) et (1″,4) découlent des hypothèses I et II on prouvera les Lemmes suivants.

Lemme (1,5). *Les hypothèses I et II étant admises, les expressions* (1′,4) *et* (1″,4) *ne dépendent que des quasi-solutions*:

$$(1,5)\qquad \sum_{\beta=1}^{N} W_{\alpha\beta}^{Z,t+\Delta t}(X,t;Z,t+\Delta t)\,,\qquad \Delta t>0\,.$$

On démontre en effet l'égalité:

(2,5)

$$\lim_{\Delta t\to 0}\int_E |x_i-z_i||x_j-z_j|\int_t^{t+\Delta t}\int_E |W_{\alpha\gamma}^{\Pi,\zeta}(X,t;\Pi,\zeta)\Phi_{\gamma\beta}(\Pi,\zeta;Z,t+\Delta t)|\,d\Pi\,d\zeta\,dZ=0$$

$i,j=1,\ldots n,\ \alpha,\gamma,\beta=1,\ldots N,\ Z\in E.$

De même, on démontre que:

$$(3,5)\qquad \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-1}\int_E o(1)(x_i-z_i)(x_j-z_j)W_{\alpha\beta}^{Z,t+\Delta t}(X,t;Z,t+\Delta t)\,dZ=0\,.$$

si $o(1)\to 0, |XZ|\to 0$, ce qui démontre l'égalité (1′,4).

Lemme (2,5). *Les hypothèses I et II étant admises, on peut écrire*:

$$(4,5)\qquad \lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-1}\int_E (x_i-y_i)(x_j-y_j)\sum_{\beta=1}^{N}[W_{\alpha\beta}^{Y,t+\Delta t}(X,t;Y,t+\Delta t)-$$

$$-W^{X,t}(X,t;Y,t+\Delta t)\,dY=0\,.$$

C'est une simple conséquence du théorème auxiliaire 1. de l'ouvrage [3].

Pour démontrer l'égalité (1′,4), il nous faut encore deux lemmes.

LEMME (3,5). *Les hypothèses I et II étant admises et si* $f(Y)$ *est une telle fonction de la classe* Z_2^2 *que*:

$$\lim_{Y\to X} f(Y) = 1\,, \qquad X = \text{const}\,, \tag{6,5}$$

alors:

$$\lim_{\Delta t\to 0} (\Delta t)^{-1} \int_E (x_i - y_i)(x_j - y_j)[1 - f(Y)] W_{\alpha\beta}^{X,t;\,Y,t+\Delta t}(X,t;Y,t+\Delta t)\,dY = 0 \tag{7,5}$$

Ce Lemme est une simple conséquence de la formule (3,5).

LEMME (4,5). *Les hypothèses I et II étant admises, on peut écrire:*

(8,5)

$$\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t)^{-1} \int_E (x_i - y_i)(x_j - y_j) f(Y) W_{\alpha\beta}^{X,t}(X,t;Y,t+\Delta t)\,dY = \begin{cases} 0, & i \neq j,\ j = 1,\dots,n \\ 2A_{\alpha\beta}^{k_1,\dots,k_n}, & \end{cases}$$

$$k_i = 2,\ k_1,\ \dots,\ k_{i-1},\ k_{i+1},\ \dots,\ k_n = 0,\ i = 1,\ \dots,\ n$$

pour:

$$f(Y) = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu - x_\nu)^2\right). \tag{8',5}$$

On voit facilement que l'égalite (1'',4) est une simple conséquence des Lemmes (1,5), (2,5), (3,5) et (4,5). La démonstration du Lemme (4,5) est compliquée. Elle résulte des définitions (2,2), (2',2) et (3,2), de même que des formules (16) et (32) de l'article [3], ainsi que des propriétés de la fonction de Gauss: du fait qu'elle est paire et du calcul de ses moments.

En particulier, on profite des formules suivantes:

(9,5)

$$\int_E \frac{u_l u_j}{\Delta t} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}{}'\left(u_\nu^2 + 2i\gamma_\nu \frac{u_\nu}{\sqrt{\Delta t}}\right)\right\} dU = -(2\pi)^{n/2}\frac{\gamma_l\gamma_j}{(\Delta t)^2}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu^2}{\Delta t}\right),\ l\neq j$$

$$\int_E \frac{u_l^2}{\Delta t} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}{}'\left(u_\nu^2 + 2i\gamma_\nu \frac{u_\nu}{\sqrt{\Delta t}}\right)\right\} dU = \tag{9',5}$$

$$= (2\pi)^{n/2}(\Delta t)^{-1}\left(1 - \frac{\gamma_l^2}{\Delta t}\right)\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\gamma_\nu^2}{\Delta t}\right).$$

Elles aident à calculer l'expression J^l sous le signe de la limite dans la formule (8,5), à savoir:

$$J^l \equiv 0\,, \qquad i \neq j \tag{10,5}$$

et:

$$J^l = (2\pi)^{-n/2}\int_{-\infty}^{+\infty} v_\alpha^\beta(t, t+\Delta t; X, t; S)(1 - s_l^2)(\Delta t)^{-1}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} s_\nu^2\right) dS\,. \tag{10',5}$$

On obtient la thése du Lemme (4,5) de cette dernière formule, en passant à la limite par rapport à $\Delta t \to 0$, après avoir eu recours: 1) à la formule déjà citée (16) de l'ouvrage [3]; 2) à l'expansion de la fonction

$$\exp(\lambda'_\nu s^2 \Delta t), \qquad s^2 = s_1^2 + \ldots + s_n^2$$

en série; 3) aux conditions initiales et aux équations différentielles des fonctions

$$v_\alpha^\beta(t, t+\Delta t; X, t; S)$$

aux moments initiaux, à savoir:

$$\sum_{\nu=1}^{N} K_{\alpha\nu 0}^{\beta} = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ 1, & \alpha = \beta \end{cases}, \quad [3] \tag{11,5}$$

$$\sum_{\nu=1}^{N} (K_{\alpha\nu 1}^{\beta} s^2 + K_{\alpha\nu 0}^{\beta} \lambda'_\nu s^2) = s^2 \left(\frac{dv_\alpha^\beta}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0} = \tag{11',5}$$

$$= \sum_{\substack{k_1+\ldots+k_n=2 \\ 1 \leqslant j \leqslant N}} A_{\alpha j}^{k_1,\ldots,k_n}(X,t)(is_1)^{k_1}\ldots(is_n)^{k_n} v_j^\beta(0) =$$

$$= \sum_{k_1+\ldots+k_n=2} A_{\alpha,\beta}^{k_1,\ldots,k_n}(X,t)(is_1)^{k_1}\ldots(is_n^{k_n}), \quad [3].$$

Outre cela, notons que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1-s_i^2) \exp\left(-\tfrac{1}{2}' \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu^2\right) dS = 0, \qquad i = 1, \ldots n \tag{12,5}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_l^2 (1-s_i^2) \exp\left(-\tfrac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} s_\nu^2\right) dS = \begin{cases} 0, & i \neq l \\ -2(2\pi)^{n/2}, & i = l. \end{cases} \tag{12',5}$$

6. Les formules (1',4), (1'',4) et (1''',4) étant démontrées, nous pouvons constater que la fonction $P_\alpha(X, t; Y, \tau)$ est une solution de l'équation parabolique (1,4). Soit

$$\Gamma_\alpha(X, t; Y, \tau), \qquad t < \tau, \tag{1,6}$$

la solution fondamentale [2], normalisée [1] de cette équation et soit $\varrho(X)$, $X \in E$, une fonction bornée et höldérienne dans E. On sait que les fonctions:

$$\int_E P_\alpha(X, t; Y, \tau)\varrho(Y)dY \quad \text{et} \quad \int_E \Gamma_\alpha(X, t; Y, \tau)\varrho(Y)dy$$

sont des solutions bornées de la même équation (1,4) et de la classe Z_1', et qu'elles convergent vers la même limite $\varrho(X)$; pour $t \to \tau$ elles sont donc identiques. Il résulte donc facilement qu'on a aussi:

$$P_\alpha(X, t; Y, \tau) \equiv \Gamma_\alpha(X, t; Y, \tau) \qquad \alpha = 1, \ldots, N$$

ce qui prouve l'inégalité 1) du par. 1 *). On a donc démontré le

THÉORÈME (1,6). *Les hypothèses I, II et III étant admises, les sommes des composantes des solutions fondamentales* $\Gamma_{\alpha\beta}(X, t; Y, \tau)$ *du système parabolique* (1,1) *à savoir les fonctions:* $P_\alpha(X, t; Y, \tau)\, \alpha = 1, \ldots, N$ *sont des fonctions de passage.*

Remarque (1,6). Si l'inégalité III du par. 1 résulte de l'hypothèse II pour au moins un indice $1 \leqslant \alpha \leqslant N$, alors, en supprimant l'hypothèse III, on peut affirmer qu'au moins une des fonctions $P_\alpha(X, t; Y, \tau)$ est une fonction de passage.

Remarque (2,6). La démonstration du cas général, où l'on ne suppose pas que les racines λ_α sont paires par rapport à toutes les variables $s_1, \ldots, s_n$ (vide II par. 1) est beaucoup plus difficile. Les limites (8,5) sont alors pour $i \neq j, i, j, = 1, \ldots, n$ égales à

$$A_{\alpha\beta}^{k_1, \ldots, k_n},$$

où $k_i = k_j = 1, k_1 + \ldots + k_n = 2, 0 \leqslant k_l \leqslant 2, l = 1, \ldots, n$; la formule ($1^{IV}$,4) est convenablement changée. Dans l'enoncé du Théorème (1,6) on peut omettre la supposition III, admettant l'hypothèse qui assure la parabolicité de l'équation (1,4), $(\alpha = 1, \ldots, N)$.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES
(INSTYTUT MATEMATYCZNY PAN)

OUVRAGES CITÉS

[1] H. Milicer-Grużewska, *La solution de la première équation de Kolmogoroff aux coefficients höldériens*, Compt. Rend. Hebd. Acad. Sci.

[2] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche Math. **5** (1956), 25-33.

[3] — *Étude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux derivées partielles*, Ricerche Mat. **7** (1958), 153-185.

[4] — *Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Math. Scand. **6** (1958), 237-262.

[5] H. Milicer-Grużewska, *Le théorème d'unicité de solution d'un système parabolique d'équations linéaires avec les coefficients höldériens*, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. sci. math. astr. et phys. **7** (1959), 593.

[6] — *Le second théorème d'unicité de solution d'un système parabolique d'équations linéaires avec les coefficients höldériens.* ibid., dans ce numéro.

[7] — *La construction du champ de probabilité avec la solution fondamentale de l'équation parabolique normale aux coefficients höldériens.* ibid. **7** (1959), 673.

[8] W. Pogorzelski, *Propriétés des intégrales généralisées de Poisson-Weierstrass et problème de Cauchy pour un système parabolique*, Ann. Ec. Norm., **76** (1959), 125-149.

*) Car la fonction $\varrho(Y)$ est arbitraire et on a demontré dans ouvrage [1] que la fonction $\Gamma_\alpha(X, t; Y, \tau)$ est non négative.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 12, 1959

THEORETICAL PHYSICS

On the Vector Bosons

by

W. KRÓLIKOWSKI

Presented by W. RUBINOWICZ on October 23, 1959

Recently a hypothesis of a charged vector boson, which would mediate in weak interactions, was much discussed (for a survey and criticism of the present status of this hypothesis compare [1]). In the present note a formalism for elementary particles proposed previously by the author [2] is extended in such a way as to include vector bosons: the photon and this hypothetical intermediate particle. In [2] an analogy between pseudoscalar bosons (mesons K, π) and heavy fermions (baryons $N, \Lambda^0, \Sigma, \Xi$) was tentatively suggested. A similar analogy is now sought for between vector bosons and light fermions (leptons $(\nu, e^-), \mu^-$).

The baryon and meson fields have the forms (cf. [2]):

$$(1)\quad B = \begin{pmatrix} B_{\alpha} \\ B_{\alpha\alpha_1} \\ B_{\alpha\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\, n \\ \Lambda^0, \Sigma^+ \Sigma^0 \Sigma^- \\ \Xi^0 \Xi^- \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} M_{\alpha} \\ M_{\alpha\alpha_1} \\ M_{\alpha\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^+ K^0 \\ ?^0,\ \pi^+ \pi^0 \pi^- \\ ?^0 ?^- \end{pmatrix}.$$

The isospin index $\alpha = 1, 2$ corresponds here to charges $+e, 0$; the isospin indices $\alpha_i = 1, 2\ (i = 1, 2)$ correspond to charges $0, -e$. The indices $\alpha_i (i = 1, 2)$ obey Fermi-Dirac statistics (Pauli principle) and that is the reason, why only written components appear in (1). In the case of baryons the vector addition of isospins leads exactly to the presently known particles; in the case of mesons, beside known particles also some so far undiscovered ones are obtained: a neutral isoscalar boson with strangeness 0 (hypothetical π_0^0 or ϱ^0) as well as a neutral and a negative isospinor boson with strangeness 1 (if K^+, K^0 have the strangeness -1).

Now, we introduce a vector boson field G in analogy to the lepton field L:

$$(2)\qquad L = \begin{pmatrix} L_{\alpha_1} \\ L_{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu e^- \\ \mu^- \end{pmatrix}, \qquad G = \begin{pmatrix} G_{\alpha_1} \\ G_{\alpha_1\alpha_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 B^- \\ C^- \end{pmatrix}.$$

In this case there are only isospin indices $\alpha_i (i = 1, 2)$ corresponding to charges $0, -e$ and obeying Fermi-Dirac statistics. In consequence,

TABLE

Fermions	S	T	T_3	Q	Bosons	S	T	T_3	Q
$B_a = N_a = \begin{cases} p \\ n \end{cases}$	0	$\frac{1}{2}$	$=\frac{1}{2}$	$+e$ 0	$M_a = K_a = \begin{cases} K^+ \\ K^0 \end{cases} (K_1^0,\ K_2^0)$	-1	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	$+e$ 0
$\frac{1}{i\sqrt{2}}(B_{12}-B_{21}) = \Lambda^0$	1	0	0	0	$\frac{1}{i\sqrt{2}}(M_{12}-M_{21}) = \varrho^0 = ?^0$	0	0	0	0
$B_{11} = \Sigma^+$	1	1	$+1$	$+e$	$M_{11} = \pi^+$	0	1	1	$+e$
$\frac{1}{\sqrt{2}}(B_{12}+B_{21}) = \Sigma^0$	1	1	0	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(M_{12}+M_{21}) = \pi^0$	0	1	0	0
$B_{22} = \Sigma^-$	1	1	1	$-e$	$M_{22} = \pi^-$	0	1	-1	$-e$
$\frac{1}{i\sqrt{2}}(B_{a12}-B_{a21}) = \Xi_a = \begin{cases} \Xi^0 \\ \Xi^- \end{cases}$	2	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0 $-e$	$\frac{1}{i\sqrt{2}}(M_{a12}-M_{a21}) = \begin{cases} D^0 = ?^0 \\ D^- = ?^- \end{cases}$	1	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0 $-e$
$L_a = \begin{cases} \nu \\ e^- \end{cases}$	0	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0 $-e$	$G_a = \begin{cases} B^0 \\ B^- = ?^- \end{cases} (B_1^0 = ?^0,\ B_2^0 = \gamma)$	1	$\frac{1}{2}$	$\pm\frac{1}{2}$	0 $-e$
$\frac{1}{i\sqrt{2}}(L_{12}-L_{21}) = \mu^-$	1	0	0	$-e$	$\frac{1}{i\sqrt{2}}(G_{12}-G_{21}) = C^- = ?^-$	2	0	0	$-e$

only the written down components appear in (2). The fields B^- and C^- represent negative vector bosons with strangeness 1 and 2, respectively. A linear combination of these fields could represent the hypothetical particle acting as intermediate in weak interactions. From the neutral field B^0 and its charge conjugate $\bar{B}^0$ we can form two real fields

$$(3) \qquad B_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^0 + \bar{B}^0) \quad \text{and} \quad B_2^0 = \frac{1}{i\sqrt{2}}(B^0 - \bar{B}^0),$$

which stand in analogy to the neutral kaons K_1^0 and K_2^0 discovered by Gell-Mann and Pais. It should be noted that using the PC transformation one gets

$$(4) \qquad PC B_1^0 (PC)^{-1} = -B_1^0 \quad \text{and} \quad PC B_2^0 (PC)^{-1} = B_2^0 .$$

Since, applying the PC transformation to fermion forms: $:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:$ and $:\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi:$ (where $(\gamma_\mu) = (\gamma_0, \vec{\gamma})$) one obtains

$$(5) \quad PC:\bar{\psi}\gamma_\mu\psi:(PC)^{-1} = :\bar{\psi}\gamma_\mu\psi: \quad \text{and} \quad PC:\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi:(PC)^{-1} = -:\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi:,$$

we can see that the $(B_1^0)_\mu$ field cannot be coupled to forms: $:\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi:$ and $:\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi:$ in a PC-invarian ttheory. Thus, only the field $(B_2^0)_\mu$ could be indentified with the electromagnetic field A_μ (the gauge invariance requirement elimates additionally the coupling of $(B_2^0)_\mu$ to $:\bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi:$).

All discussed particles are listed in the Table (cf. [2]). The charge of the particles is given generally by the formula (cf. [2])

$$(6) \qquad Q = e\left(T_3 + \frac{N^B - N^L}{2} - \frac{S}{2}\right),$$

where S is the strangeness, N^B and N^L are the numbers of baryons and leptons, respectively. Using the values of S given in the Table we have the selection rule $\Delta S = 0$ (or $\Delta T_3 = 0$) only for strong interactions. In the electromagnetic interaction there is no rule for the strangeness, because the photon has no definite value of S. The situation is similar in the case of weak interactions.

INSTITUTE OF THEORETICAL PHYSICS, UNIVERSITY OF WARSAW
(INSTYTUT FIZYKI TEORETYCZNEJ, UNIWERSYTET WARSZAWSKI)
INSTITUTE FOR NUCLEAR RESEARCH, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
(INSTYTUT BADAŃ JĄDROWYCH PAN)

REFERENCES

[1] R. E. Marshak, Conference on Physics of High Nuclear Energy, Kiev, 1959.
[2] W. Królikowski, Nuclear Physics **8** (1958), 461; **10** (1959), 213; **11** (1959), 687.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 12, 1959

EXPERIMENTAL PHYSICS

On the Working Mechanism of Thin Layers in Pick-up Tubes

by

A. FRYSZMAN

Presented by A. JABŁOŃSKI on October 1, 1959

In "Vidicon" type pick-up tubes used for teletransmission of pictures, there is a thin semiconducting layer that plays the part of a photosensitive element. In operation, the layer is scanned by a sharply focussed electron beam. Some of the electrons remain on the layer, whilst others return to the collector as a result of processes connected with secondary emission (Fig. 1). For a given layer, the ratio of the numbers of electrons in both

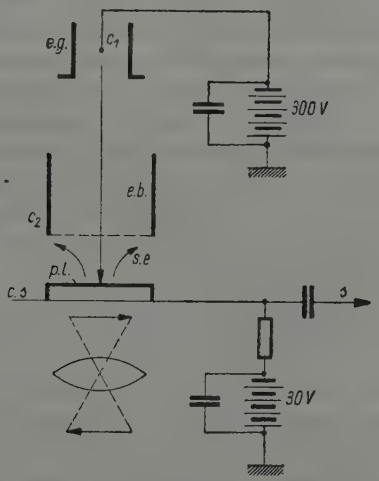


Fig. 1. Scheme of "Vidicon" tube in operation: C_1 — cathode; C_2 — collector; *eg* — electron gun; *eb* — electron beam; *se* — secondary electrons; *pl* — photosensitive layer; *cs* — conducting substratum; *s* — signal

groups depends on the potential of the surface element. Since the potential of the layer varies according to illumination, the tube transforms changes in illumination into electric current variations. The output may

come either from the collector or from the conducting substratum of the layer.

The exact mechanism of operation of the tube has not yet been fully investigated. Thus, e. g., Knoll and Kazan [1] represent the opinion that the electron beam current charges the layer to the highest possible potential, which is that of the cathode. When the latter is attained, the current feeding the surface element ceases to flow. Output would result from differences in the charge required by the variously charged surface elements of the photosensitive layer for attaining cathode potential.

Other authors [2] consider the current of the electron beam to be insufficient for charging the layer to cathode potential. Here, output can be explained only by the dependence of secondary emission on the potential of the layer, since the beam current is constant.

The present paper deals with the mathematical analysis of the phenomena occurring within thin layers undergoing periodical bombardment by an electron beam. Only tubes of "Vidicon" type will be discussed here; however, the results can be applied to other cases in which an electron beam operates in connection with a thin isolating or semiconducting layer.

The mathematical analysis of the phenomena occurring in thin layers is carried out easily, if a surface element whose dimensions correspond to those of the smallest detail normally transmitted by the tube in operation is considered separately from the rest of the layer.

Since a detail is, in general, transmitted by the tube independently of the contents of the remaining picture, the analysis of the way a single element operates will correctly illustrate the operation of the entire layer. The operating cycle of an element of the surface switched at regular time intervals by an electron beam consists of two parts:

1. the period during which the element is switched by the electron beam, i. e. during which the electrons landing on the surface charge it and during which a current flows through the layer capacity yielding the output voltage on the output resistance;

2. the period of discharging, during which the layer partly discharges over its inner resistance. During this period, the electron beam scans other surface elements.

Fig. 2 shows the layer's equivalent system. Switch "K" is on throughout the switching period and is switched off throughout that of uncharging. The system is fed by a generator of current I_s. The dependence of its current upon the voltage across the capacity C should be analogous to that of the current flowing through the layer during the period of switching upon the voltage across the layer.

The foregoing system can be split into two equivalent systems: one for the period of discharging, and one for that of switching.

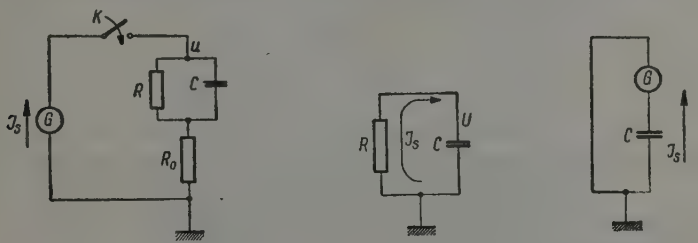
During the former, the system can be said to consist of the capacity C of the layer in parallel with the resistance R of the layer.

Such a system (Fig. 3) is accounted for by the following differential equation:

$$C\frac{dU}{dt}+\frac{U}{R}=0 \quad \text{for} \quad t \leqslant t_k \leqslant t_0 . \tag{1}$$

In order to obtain the equivalent system for the period of switching, additional considerations are necessary.

From the operating mechanism of the tubes, it is seen that the latter must necessarily conserve a residual charge throughout the period of



Figs. 2, 3, 4. Equivalent systems

discharging of the surface element capacity. The amount of this charge depends on the illumination of the layer. As the period of discharging lasts 4×10^{-2} sec, the resistance R should be sufficiently great to sustain charge within the capacity C connected in series. Therefore in analyzing the period of switching, which lasts 0.725×10^{-7} sec, the resistance R which is now parallel to the capacity C can be neglected.

The other resistance in the system, R_0, is that of the output, connected in series with the photosensitive layer. As the electron beam scans the layer, it causes resistance R_0 to switch from one surface element to another. Clearly, the resistance should not affect the currents coming from the various elements and should involve no transients. The foregoing requirement is equivalent to the absence of R_0 from the equivalent system (Fig. 4).

To obtain the differential equation, it is necessary to express analytically the dependence of the generator current in the equivalent system on the required voltage across the capacity C. Clearly, the electron gun feeds the surface of the layer with a DC beam of intensity I_w. The quantity I_w is independent of the state of the surface of a given layer and of the construction of the gun. Due to secondary emission, only part of this current remains on the surface of the layer in the form of electric charge, whilst the rest returns to the collector of secondary electrons.

Fig. 5 shows the dependence of the secondary emission rate on the voltage accelerating the electrons.

The graph for Sb_2S_3 — a compound often put to use in pick-up tubes — is taken from the literature [2]. The part of the current I_s remaining on the layer can be expressed by the beam current I_w and the secondary emission rate $\sigma = \sigma(U_{ac})$ as follows:

$$I_s = I_w[1-\sigma(U_{ac})] \quad \text{for} \quad \sigma < 1\,, \tag{2}$$

where U_{ac} denotes the accelerating voltage.

A detailed discussion will now be given for $\sigma < 1$, since with $\sigma > 1$ the solution is identical but for its sign. To simplify, it will be assumed

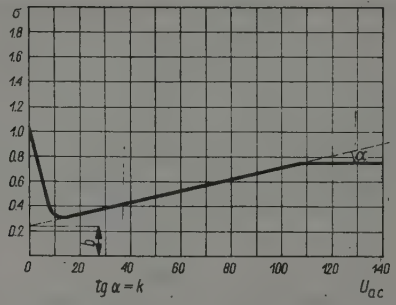


Fig. 5. Secondary emission versus voltage accelerating electron beam: σ — secondary emission rate; U_{ac} — accelerating voltage

that the secondary emission rate is linear in the accelerating voltage throughout the interval under consideration. In Sb_2S_3, as shown (dashed line) in the graph, linearity is, in fact, a realistic assumption. In Fig. 5 the characteristic is seen to present a break. The portion beyond the break can also be represented by a strainght line having an appropriate slope. At the point of the break in the characteristic, however, the operation of the layer requires a separate analysis. The linear approximation will admit of a simple interpretation of the final result; thus:

$$\sigma = kU_{ac} + b \tag{3}$$

with the voltage notation adopted

$$U_{cs} = U_{cs} - U \quad \text{and} \quad \sigma = k(U_{cs} - U) + b\,,$$

where U_{cs} denotes the voltage on the conducting substratum of the layer with respect to that of the electric gun cathode, and U — the voltage at the photosensitive layer.

The equation of the output current as dependent on U can be written as follows:

$$I_s = I_w(1-\sigma) = I_w(1 - kU_{cs} + kU - b). \tag{4}$$

The notation

$$1 - kU_{cs} - b = d$$

will be used henceforth.

The differential equation for the switching process is:

$$C\frac{dU}{dt} = I_w(d+kU) \quad \text{for} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_k . \tag{5}$$

Eqs. (1) and (5) are simple ones and their solution will be given without the intermediary steps. Integration for the process of charging is from $t = 0$ – the beginning of switching – to t, whereas for that of discharging it is from $t = t_k$ – the beginning of discharging – to t

$$U_k = \frac{d}{k}\left(e^{\frac{I_w k t}{C}} - 1\right) + U_{0k} e^{\frac{I_w k t}{C}} \quad \text{for} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_k \tag{6}$$

$$U_r = U_{0r} e^{-\frac{t-t_k}{RC}} \quad \text{for} \quad t_k \leqslant t \leqslant t_0 , \tag{7}$$

where

U_k – the voltage on the layer during switching,
U_{0k} – the value of that voltage at the beginning of the switching period,
U_r – the voltage on the layer during discharging,
U_{0r} – the value of that voltage at the beginning of the discharging period.

Fig. 6 shows schematically some periods of charging and discharging.

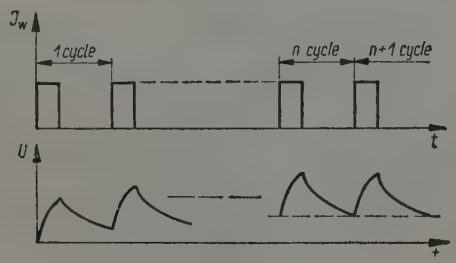


Fig. 6. Graph of voltages and currents in photosensitive layer *versus* time

It is easily seen that the voltage U_{0k} from Eq. (6) in any $(n+1)$-st cycle equals the final discharging voltage from Eq. (7) in the n-th cycle. Since simultaneously in the n-th cycle

$$U_k(n) = U_{0r}(n) ,$$

$$t = t_k ,$$

hence

$$U_{0k}(n+1) = U_r(n) = \left\{\frac{d}{k}\left[\exp\left(\frac{I_w \cdot k}{C} T_k\right) - 1\right] + U_{0k}(n) \exp\left(\frac{I_w \cdot k}{C} T_k\right)\right\} \exp\left(-\frac{T_0}{RC}\right),$$

where T_k and T_0 denote the lengths of the period of switching and of discharging, respectively

$$T_k = t_k , \qquad T_0 = t - t_k .$$

With the notation:

$$A = \exp\left(-\frac{T_0}{RC} + \frac{I_w \cdot k}{C} T_k\right), \qquad B = \frac{d}{k}\left[\exp\left(\frac{I_w \cdot k}{C} T_k\right) - 1\right] \exp\left(-\frac{T_0}{RC}\right)$$

the following difference equation is obtained:

$$U_{0k}(n+1) - A\,U_{0k}(n) = B\,.$$

Its solution is

$$U_{0k}(n) = B\frac{A^n - 1}{A - 1} + \underset{n=1}{U_{0k}} A^n\,. \tag{8}$$

Substituting $U_{0k}(n)$ from Eq. (8) into Eqs. (6) and (7) yields

$$U_k(n) = \frac{d}{k}\left[\exp\left(\frac{I_w \cdot k}{C} t\right) - 1\right] + B\frac{A^n - 1}{A - 1} \exp\left(\frac{I_w \cdot k}{C} t\right) + \underset{n=1}{+ U^{0k}} A^n \quad \text{for} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_k\,. \tag{9}$$

With respect to $\underset{t=t_k}{U_{r0}}(n) = U_k(n)$, Eq. (9) yields

$$U_r(n) = \underset{t=t_k}{U_k}(n) \exp\left(-\frac{t - t_k}{RC}\right) \quad \text{for} \quad t_k \leqslant t \leqslant t_0\,. \tag{10}$$

The foregoing equations hold for any n-th cycle; the time t, however, should be counted from 0 in each cycle.

As the number of cycles $n \to \infty$ in the steady state, $A^n \to 0$ and Eqs. (9) and (10) take the form of the steady state:

$$U_k(n) = \frac{d}{k}\left[\exp\frac{I_w \cdot k}{C} t - 1\right] - \frac{B}{A - 1} \exp\left(\frac{I_w \cdot k}{C} t\right) \quad \text{for} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_k\,. \tag{11}$$

$$U_r(n) = \left\{\frac{d}{k}\left[\exp\left(\frac{I_w \cdot k}{C} T_k\right) - 1\right] - \frac{B}{A - 1} \exp\left(\frac{I_w \cdot k}{C} T_k\right)\right\} \exp\left(-\frac{t - t_k}{RC}\right) \quad \text{for} \quad t_k \leqslant t \leqslant t_0\,. \tag{12}$$

The required output current equals the charge that assembles upon the surface element in the switching process, divided by the time of switching:

$$I_s = \frac{\Delta Q}{T_k} = \frac{C \Delta U}{T_k}\,, \tag{13}$$

wherein ΔU is the variation of the voltage at the surface element during the switching process:

$$\Delta U = \underset{t=t_k}{U_k}(n) - \underset{t=t_0}{U_r}(n-1)\,.$$

Finally, Eqs. (11) and (12) yield

$$I_s = \frac{d \cdot C}{k \cdot T_k} \frac{(e^{\alpha}-1)(1-e^{-\beta})}{1-e^{(\alpha-\beta)}} \tag{14}$$

with

$$\alpha = \frac{I_w \cdot k}{C} T_k , \quad \beta = \frac{T_0}{RC} .$$

At high voltages on the layer, i. e. low accelerating voltages, secondary emission processes occur beyond the point of discontinuity of the characteristic (Fig. 5). In this case, an appropriate value of the coefficient k should be chosen in Eq. (3) et seq.

The final Eqs. (9)-(12) and (14), except for a change in the sign of the coefficient, remain unchanged.

The same case can occur at high accelerating voltages, since usually on attaining its maximum value the secondary emission rate falls to $\sigma < 1$.

Restricting the problem to low voltages only, $b = 1$ [Eq. (4)], as $- = 1$ at $U = 0$. Then

$$I_s = \frac{C U_{cs}}{T_k} \frac{(1-e^{-\alpha})(1-e^{-\beta})}{1-e^{-(\alpha+\beta)}} . \tag{16}$$

Case of $\sigma > 1$. Here, the current flows through the layer in the opposite direction and exceeds the current of the beam

$$I_s = I_w(\sigma - 1)$$

as previously,

$$\sigma = k(U_{cs} - U) + b ,$$

whence

$$I_s = I_w(kU_{cs} + b - 1) - I_w kU = I_w(d_1 - kU) ,$$

with

$$d_1 = kU_{cs} + b - 1 .$$

The solution is similar to the one obtained previously; in Eqs. (9)-(12) and (14), the quantity d should be replaced by d_1.

As compared with the case of $\sigma < 1$, the part played by coefficient k has undergone a change: with $tg\,\alpha$ retaining its sign, the coefficient k has the opposite sign in the final equations. This change is easily explained: at $\sigma < 1$, a decrease in the accelerating voltage at $k > 0$ causes an increased current flow throught the layer, whereas at $\sigma > 1$, if the slope of the characteristic retains its sign, a decrease in the accelerating voltage causes the current to diminish.

The operative inertance of the thin layer can be computed from Eq. (8) as follows:

$$A_n = \left(e^{-\frac{T_0}{RC}} \cdot e^{-\frac{I_w \cdot k}{C} T_k}\right)^n . \tag{17}$$

In (17), the sign of k should be chosen in accordance with the secondary emisson characteristic as described above.

Clearly, Eq. (17) accounts for inertance connected with macroscopic processes in the electric system only.

The author is indebted to Professor A. Jabłoński for discussing the problems considered in the present paper.

INSTITUTE OF INDUSTRIAL ELECTRONICS, WARSZAWA
(PAŃSTWOWY INSTYTUT PRZEMYSŁOWY ELEKTRONIKI, WARSZAWA)

REFERENCES

[1] M. Knoll and B. Kazan, *Storage tubes and their basic principles* (1952) John Wiley and Sons, N. Y.

[2] V. L. Gerus, Techn. kino- i televid. (in Russian) **4** (1958), 12-14.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE
POLONAISE DES SCIENCES
Série des sci. math., astr.
et phys. — Vol. VII, No. 12, 1959

EXPERIMENTAL PHYSICS

Electric and Magnetic Properties of Plasma of Low Power Pulse Discharges

by

B. PIEKARA

Presented by A. JABŁOŃSKI on October 5, 1959

The plasma of pulse discharges is a source of both high temperature and of considerable radiation of light. Both quantities, i. e. temperature and radiation energy are connected by the function $S \approx \frac{p}{T}\exp\left(-\frac{E_e}{kT}\right)$ for the linear spectrum or $S' \approx p\exp\left(-\frac{E_i}{kT}\right)$ for the continuous part of radiation; E_e is the average value of the excitation energy, E_i the ionisation energy and p the gas pressure. In this work plasma is investigated, in which maximal power of 10^6 W is developed. The aim of this investigation is to determine the axial electrostatic potential distribution in plasma and especially to investigate the influence of the longitudinal and transverse magnetic field on the intensity of the light emitted by plasma.

Discharges were produced in flashtubes of Jena-glass filled with pure argon at pressures from 3 to 15 cm Hg. Energy was supplied by a 80 μF condenser charged to a potential 2000 V, below the breakdown voltage. The discharge was ignited by applying a low power electrostatic pulse to an external "trigger" electrode. The peak amplitude of the gas current was about 7000 amp. and the velocity of the increase of the current pulse $\left(\frac{di}{dt}\right)$ was of the order of 10^8 amp. sec^{-1}.

In the first phase of the work the plasma resistance was found on the base of current-voltage characteristics, which are known to be linear [1]. The resistance is of the order of 0.1 ohm for a tube of about 2 cm diameter, the distance of the electrodes 14.5 cm and the gas pressure 13 cm Hg. The low value of resistance indicates a large degree of ionisation. The measurements of the distribution of the maximal values of potential were performed by the oscillographic method. They obviously

indicate a linear distribution (Fig. 1). Therefore, ions and electrons seem to be equally distributed in the space between the electrodes, probably owing to a turbulent flow of the electric current [2].

The second part of the research consisted in a series of experiments in which the pulse discharges are ignited in the uniform transverse and longitudinal magnetic field. In the first case, the flashtube was fitted

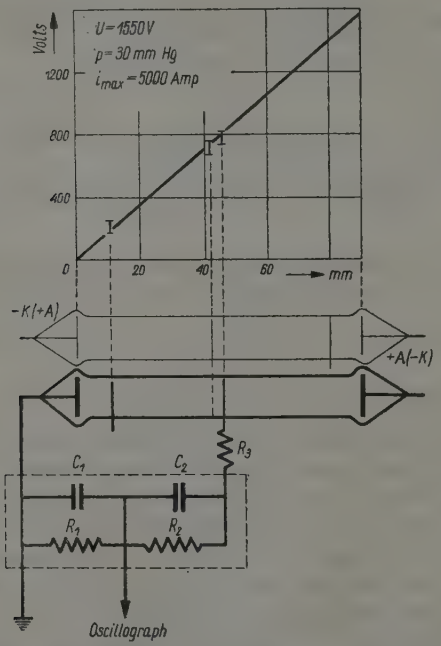


Fig. 1. Axial electrostatic potential distribution in plasma of pulse discharges

between the poles of a big electromagnet (~10000 oe.), in the second case the flashtube was placed inside a small solenoid (self-inductance about 10 μH) which was connected in series to the tube's circuit and produced a maximal peak field of 9000 oe. The experimental data were obtained from photographs of both the spectrum of plasma and of the oscillograph screen, showing the synchronized recurrent traces of current pulses and light pulses. Fig. 2 shows the block diagram of the equipment.

The results of measurements by means of a 931-A multiplier of the peak values of the radiation are shown in Fig. 3a and b. Fig. 3b shows the change in the peak amplitude of light with increasing transverse magnetic field at constant gas pressure, and Fig. 3a this peak radiation as function of gas pressure in the constant transverse field. It can be

seen that the influence of the magnetic field on the maximal intensity of the light emitted by the plasma was apparent, it is considerably greater in the transverse magnetic field (Fig. 4a). The results were confirmed by photographs of spectra (Fig. 4b) which illustrate the effect of the magne-

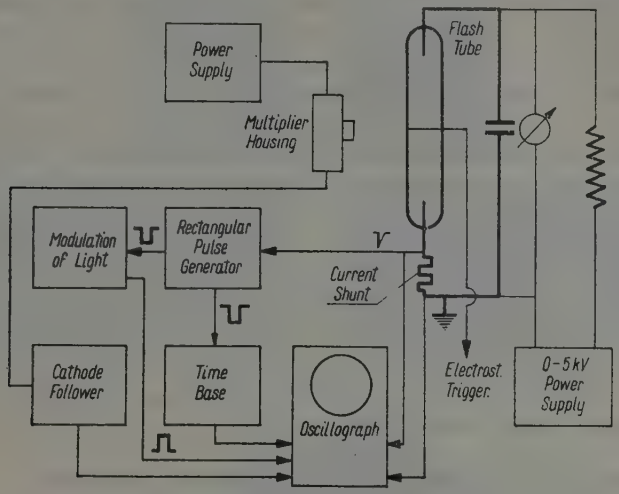


Fig. 2. Block diagram of apparatus

tic field on the intensity of the continuous spectrum. The accompanying photographs show distinctly that when the plasma is placed in a transverse magnetic field, the intensity of continuum is considerably greater than in its absence. It is probable that in a amagnetic field electrons and

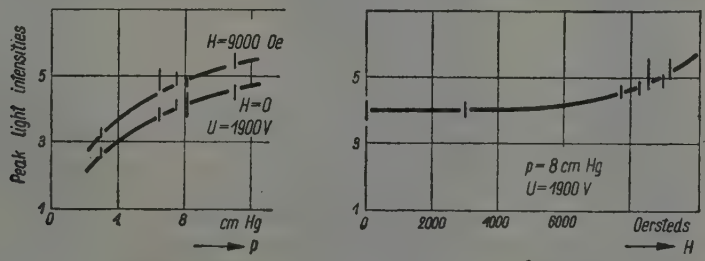


Fig. 3a and b. Peak light intensities as a function of the gas pressure (a) and as a function of the transverse magnetic field (b).

ions have a greater chance of recombining, possibly due to the occurrence of an extra magnetic pressure which constricts charged particles and bends them towards the wall of the tube.

A quite opposite effect was observed in the discharge plasma when a longitudinal pulse magnetic field produced by a solenoid on the tube

was applied. It is known that the longitudinal magnetic field, especially when large, inhibits all motions of the charges perpendicular to its direction and consequently also the compression of plasma caused by a self-magnetic field ("pinch effect"), thus counteracting the pinching process [3]. Therefore, a decrease of the recombination of ions and electrons is to be expected. This was confirmed on the oscilloscopic and spectroscopic photographs of the light emitted by a flash obtained with a solenoid in the circuit of the tube: the radiation intensity in the presence of a magnetic field (solenoid on the tube) in the range of continuous spectrum is considerably smaller than without the field (Fig. 5a and b). The intensity of the spectral lines is obviously weaker; consequently it may be inferred that in the longitudinal magnetic field the number of excitation acts diminishes.

The above relations have led the author to a supposition that the transverse magnetic field may cause an increase of the plasma temperature; the contact of plasma with the walls of the tube may be avoided, if a field of appropriate shape or a rotating one could be applied.

The author wishes to thank Professor I. Adamczewski for his kind encouragement and interest.

2nd DEPARTMENT OF PHYSICS, TECHNICAL UNIVERSITY, GDAŃSK
(II ZAKŁAD FIZYKI, POLITECHNIKA GDAŃSKA)

REFERENCES

[1] P. M. Murphy and H. E. Edgerton, J. Appl. Phys. **12** (1941), 848.
[2] K. G. Emeleus, Proc. Phys. Soc. B., **64** (1951), 164.
[3] L. C. Burkhardt, R. H. Lovberg, C. A. Sawyer and T. F. Stratton, J. Appl. Phys. **29** (1958), 964.

Fig. 4a. 1. Photographs of the discharge during one flash with and without magnetic field. 2. Oscillogram of total quantity of light. Each picture is composed of 25 single flashes. The duration of each flash is 108 μ sec without — and 97 μ sec with field; the peak value is 30 and in field 33 (in arbitrary units). 3. Current as a function of time. The capacity of the condenser 80 μF

Fig. 4b. Photographs of spectrum of pulse discharge in argon (a condenser of 80 μF, a potential of 1750 V) with and without transverse magnetic field. 1. $H = 0$; 2. $H =$ = 9200 oe; 3. $H = 8300$ oe.

Fig. 5a. Variation of peak intensity of a radiation in the presence of longitudinal and transverse magnetic field (with solenoid in tube's circuit). 1. Without field (without solenoid on the flashtube). The duration of the radiation is $t = 175$ μ sec and the peak value of its intensity $a = 31$ (in arbitrary units). 2. With longitudinal field (the solenoid on the tube) $t = 150$ μ sec; $a = 28$. 3. With transverse field, $t = 162$ μ sec, $a = 33$. 4. With longitudinal and transverse field, $t = 156$ μ sec; $a = 35$

Fig. 5b. Photographs of spectrum of pulse discharges in longitudinal magnetic field (2) and without field (1)

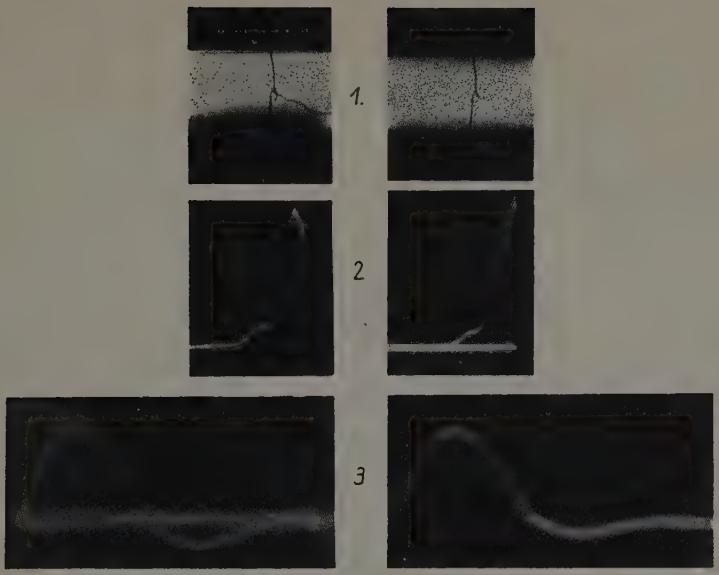


Fig. 4a

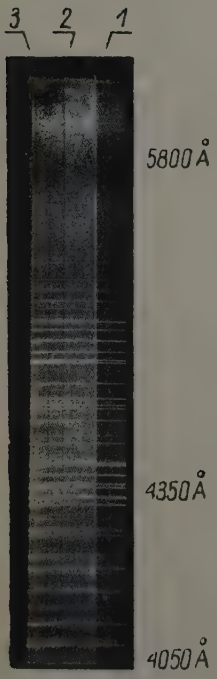


Fig. 4b

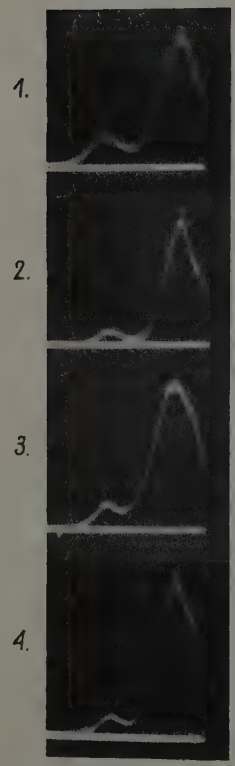


Fig. 5a

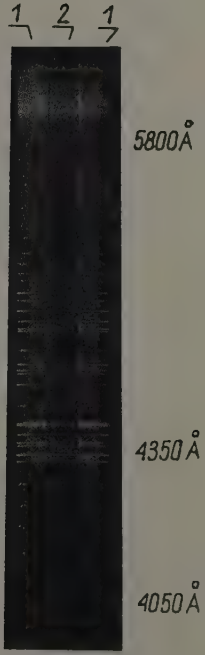


Fig. 5b

TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME VII

Mathématique

R. Bittner, On Certain Axiomatics for the Operational Calculus 1
J. Albrycht, Some Remarks on the Marcinkiewicz-Orlicz Space. II 11
J. Łoś, Linear Equations and Pure Subgroups 13
J. Łoś, Generalized Limits in Algebraically Compact Groups 19
E. Sąsiada, Construction of Directly Indecomposable Abelian Groups of Power Higher than That of the Continuum. II 23
T. Ganea, Comment on the Imbedding of Polyhedra in Euclidean Spaces . . 27
M. Altman, On Involution in Banach Spaces 33
M. Altman, Continuous Transformations of Locally Convex Spaces onto Itself 37
M. K. Fort Jr, ε-Mappings of a Disc onto a Torus 51
J. Albrycht, Some Remarks on the Marcinkiewicz-Orlicz Space. III 55
W. Pogorzelski, Sur certaines classes de fonctions complexes définies sur les arcs non fermés 57
J. Perkal, Two New Methods of Analysing a Collection of Attributes 63
H. Steinhaus and S. Trybuła, On a Paradox in Applied Probabilities . . . 67
Z. Opial, Sur l'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle du second ordre 71
A. Szasz, Die explizite Bestimmung von einigen Klassen der assoziativen Ringe 107
W. Słowikowski, Metric Semilattices and Their Connections with Measure Theory 111
W. Słowikowski, On Regular Embeddings of a Group with Differential Operators 119
W. Słowikowski, Categories and Representations of Groups with Differential Operators 125
M. Krzyżański, Certaines inégalités relatives aux solutions de l'équation parabolique linéaire normale 131
C. Olech, Periodic Solutions of a System of Two Ordinary Differential Equations 137
S. Balcerzyk, On Factor Groups of Some Subgroups of a Complete Direct Sum of Infinite Cyclic Groups 141
E. Sąsiada, Proof that Every Countable and Reduced Torsion-Free Abelian Group is Slender 143
E. Sąsiada, On the Isomorphism of Decompositions of Torsion-Free-Abelian Groups into Complete Direct Sums of Groups of Rank One 145
K. Maurin, Sphärische Distributionen auf homogenen Räumen. Eine Verallgemeinerung des Satzes von Bochner-Weil-Rajkow 151
A. Szybiak, On the Asymptotic Behaviour of the Solutions of the Equation $\Delta u - \frac{\partial u}{\partial t} + c(x)u = 0$ 183
K. Gęba and Z. Semadeni, On the Embedding of One Space of Continuous Functions into Another 187
A. Granas, Sur la notion du degré topologique pour une certaine classe de transformations multivalentes dans les espaces de Banach 191
S. Rolewicz, Remarks on Linear Metric Montel Spaces 195
L. Włodarski, General Method of Limitation of the Borel Type 199
W. Żelazko, On a Certain Class of Topological Division Algebras 201

W. Pogorzelski, Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation elliptique 205
W. Szmielew, Absolute Calculus of Segments and Its Metamathematical Implications 213
M. Fisz, On Necessary and Sufficient Conditions for the Validity of the Strong Law of Large Numbers Expressed in Terms of Moments 221
Z. Ciesielski, On Haar Functions and on the Schauder Basis of the Space $C_{\langle 0,1\rangle}$ 227
Z. Lewandowski, Sur certaines classes de fonctions univalentes introduites par P. Montel et W. Rogosiński 261
S. Trybuła, On Lower Bounds for Probability Moments 267
A. Granas, Theorem on Antipodes and Theorems on Fixed Points for a Certain Class of Multi-valued Mappings in Banach Spaces 271
A. Granas and J. W. Jaworowski, Some Theorems on Multi-valued Mappings of Subsets of the Euclidean Space 277
A. Schinzel, Sur les sommes de trois carrés 307
W. Pogorzelski, Problémes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques 311
C. Olech, Asymptotic Behaviour of the Solutions of the Second Order Differential Equation 319
J. Krzyż, Circular Symmetrization and Green's Function 327
A. Hulanicki, On Subsets of Full Outer Measure in Products of Measure Spaces 331
K. Maurin, Eine Abschätzung für Eigenfunktionen. Beschränktheit der Eigenfunktionen der Verschiebung invarianter Operatoren auf homogenen Räumen 337
K. Urbanik, An Effective Example of a Gaussian Function 343
F. A. Szasz, Reduktion eines gruppentheoretischen Problems von O. J. Schmidt 369
S. Glidman, Some Theorems on the Gauss Algorithm and the Matrix Orthogonalization Process 373
J. Kisyński, Sur les équations differentielles dans les espaces de Banach . . 381
А. Гранас, Теорема о продолжении гомотопии в банаховых пространствах и её некоторые приложения в теории нелинейных уравнений 387
А. Гранас, О разбиении банаховых пространств 395
A. Mostowski, A Class of Models for Second Order Arithmetic 401
J. R. Shoenfield, On a Restricted-Rule 405
C. Jankiewicz, Sur une généralisation du théorème de Noether 409
Olli Tammi, On Bounded Univalent Functions 413
P. Szeptycki, Existence Theorem for the First Boundary Problem of a Quasilinear Elliptic System 419
A. T. Bharucha-Reid, Über die Konvergenz der Folgen von verallgemeinerten zufälligen Grössen in Orlicz'schen Räumen 425
K. Maurin, Spektraldarstellung der Kerne. Eine Verallgemeinerung der Sätze von Källen-Lehmann und Herglotz-Bochner u. a. 461
K. Maurin, Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen. Spektraldarstellung abstrakter Kerne. Eine Verallgemeinerung der Distributionen auf Lieschen Gruppen 471
P. Turán, On the Infinite Product Representation of Functions Regular and Nonvanishing in the Unit Circle 481
C. Olech, Estimates of the Exponential Growth of Solutions of a Second Order Ordinary Differential Equation 487
Z. Opial, Sur la stabilité des solutions périodiques et presque-périodiques de l'équation différentielle $x''+F(x')+g(x)=p(t)$ 495
S. Świerczkowski, Algebras Independently Generated by Every n Elements . 501
K. Gęba, A. Granas and A. Jankowski, Some Theorems on the Sweeping in Banach Spaces 539

C. Ryll-Nardzewski, On the Categoricity in Power $\leqslant \aleph_0$ 545
W. Matuszewska and W. Orlicz, On the Local Tests for Convergence of Fourier Series 549
J. Kurzweil, Linear Differential Equations with Distributions as Coefficients. 557
A. T. Bharucha-Reid, On Random Operator Equations in Banach Spaces . 561
Б. Боярский, О первой краевой задаче для систем уравнений эллиптического типа второго порядка на плоскости 565
J. Meder, On Certain Relations Between Euler-Knopp's and Cesàro's Summability Method in Respect to the Orthohormal Series 589
H. Milicer-Grużewska, Le théorème d'unicité de la solution du système parabolique des équations linéaires avec les coefficients höldériens 593
M. Moszyńska, A. Generalization of the Gauss-Bonnet Formula 601
E. Marczewski, Independence in Some Abstract Algebras 611
K. Urbanik, Representation Theorem for Marczewski's Algebras 617
G. Kreisel, Analysis of the Cantor-Bendixson Theorem by Means of the Analytic Hierarchy 621
W. Mlak, On a Linear Differential Inequality of Parabolic Type 653
K. Bochenek, Analytic Solutions of the Eikonal Equation 657
J. Musielak and W. Orlicz, Some Remarks on Modular Spaces 661
J. Mikusiński, Sur la convolution par $\exp(t^2)$ 669
H. Milicer-Grużewska, La construction du champ de probabilité avec la solution fondamentale de l'équation parabolique normale aux coefficients höldériens 673
S. Mrówka, On the Sets of Quasi-Components 703
Wang Sheng-Wang, A Note on the Marcinkiewicz-Orlicz Space 707
W. Pogorzelski, Propriétés d'une classe de fonctions holomorphes aux fonctions limites discontinues 711
J. Mikusiński, Une simple démonstration du théorème de Titchmarsh sur la convolution 715
H. Milicer-Grużewska, Le second théorème d'unicité de solution d'un système parabolique d'équations linéaires avec les coefficients 719
H. Milicer-Grużewska, Les propriétées probabilistes de la solution d'un système parabolique d'équations 721

Astronomie

K. Rudnicki, Methode der Untersuchung der Vertexrichtung von Sterngruppen mit geringer Mitgliederanzahl auf Grund der Eigenbewegungen der Sterne 677

Astrophysique

A. G. Pacholczyk and J. S. Stodółkiewicz, The Magnetogravitational Instability of an Infinite Homogeneous Medium When a Coriolis Force is Acting and Viscosity is Taken into Account 429
A. G. Pacholczyk and J. S. Stodółkiewicz, The Magnetogravitational Instability of a Medium in Nonuniform Rotation 503
S. Grzędzielski, On Gas Expansion in the Central Parts of the Galaxy . . 627
A. G. Pacholczyk and J. S. Stodółkiewicz, The Magnetogravitational Instability of the Medium of Finite Electrical Conductivity 681

Physique Théorique

A. Krzywicki, An Approximation Method for Solving Scattering Problems. . 41
J. Białynicki-Birula, On the Lee Model 77
B. Kuchowicz, Electron Polarization in First Forbidden Unique Beta Transitions 85
K. L. Nagy and J. Rzewuski, On the Equivalence of a Certain Class of Non-Local and Higher Order Field Theories 93
W. Królikowski, On the Second Neutral Pion 97
Z. Królikowska, Relations Between the Polynomial Method and the Factorization Method 157
M. Suffczyński, A Model for Investigation of the Optical Properties of Noble Metals 169
C. Jankiewicz, Über die Bewegungsgleichungen in linearen Feldtheorien . . . 175
Z. Szymański, On the Deformability of the Nuclear Core 233
W. Królikowski, A Fixed-Source Approach to Scattering of Kaons 237
W. Królikowski, On Isobars of the Nucleon Caused by the Kaon Field in a Fixed-Source Theory 245
J. Rayski, A Six-Dimensional Interpretation of Nuclear Forces 251
M. Suffczyński, The Numerical Values of the Two-centre Integrals for 3d Electrons in Transition Metals 285
B. Kuchowicz, Electron Polarization in First Forbidden Beta Transitions with Spin Change $\Delta J = \pm 1$ 289
I. Robinson, A Solution of the Maxwell-Eistein Equations 351
J. Szymański, $K^- + p \rightarrow Y + \pi$ Scattering and $K^- + p \rightarrow Y + \pi$ Reactions. 435
J. Łopuszański, The Ruijgrok-Van Hove Model Expressed in Terms of "Dressed" Operators 441
B. Kuchowicz, A Tentative Explanation of Small Deviations Observed in Beta Spectra 509
L. Łukaszuk, On the Mass Spectrum of Baryons 515
A. Deloff, J. Szymański and J. Wrzecionko, On the π^+ Decay of a Hyperfragment 521
J. Rzewuski, Geometrical Interpretation of Conservation Laws in the Spinor Space 571
J. Łukierski, On the Interpretation of Isovector Components 577
B. Karczewski, Fraunhofer Diffraction of an Electromagnetic Wave 633
J. Czerwonko, On the Generalization of the Variational Method of Bogoljubov 639
D. Chlebowska and J. Szymański, On the Possibility of Determining the Spin of ${}_{\Lambda}H^4$ from the Angular Distribution for Mesonic Decay 643
R. S. Ingarden, Composite Variational Problems 687
W. Królikowski, A Fixed-Source Approach to Scattering of Kaons, Supplement 691
W. Królikowski, Effective Range Approximation for Scattering of Kaons with Scalar Coupling 695
J. Czerwonko, On a Generalization of the Peierls' Theorem 699
W. Królikowski, On the Vector Bosons 729

Physique Expérimentale

H. Waleryś, Emission and Absorption Spectra of Molecules of Acridine Yellow in the Preexcited State 47
Z. Kopeć, On the Dependence of Transfer Phenomena in Semi-Conductors upon Magnetoconcentrational Effects 99
T. Figielski, On a Possible Explanation of Strong Photovoltaic Effects in PbS Layers 179

A. Zaręba, Electron Bombardment Induced Conductivity in Ge 255
M. Frąckowiak, J. Grzywacz and J. Heldt, Emission Anisotropy of Photoluminescence of Acridine Yellow in Gelatine in the Pre-excited State . . 295
J. Głowacki and R. Pohoski, Quenching of Photoluminescence of Liquid and Rigid Solutions 301
J. Głowacki, A. Kawski and B. Polacka, Further Investigations into the Emission Anisotropy of Photoluminescence of Plexiglass Luminophors . . 353
A. Bączyński and M. Czajkowski, On the Metastable State of Dye Molecules 357
A. Kawski and A. Skwierz, On the Determination of the Degree of Polarization of Light by Means of the Photoelectric Compensation Method 361
R. Bauer and M. Rozwadowski, A New Type of Fluorometer-Measurements of Decay Periods of Fluorescence of Acridine Yellow Solutions as a Function of Concentration 365
S. Brahms, Raman Spectra of Chloroform in Solutions With Diethylamine. . 449
B. Moszyńska, Le spectre Raman du deuxième ordre du tetrachlorure de titanium 455
W. Ratyński, J. Turkiewicz and P. Żuprański, Potential Scattering of Neutrons in the Resonance Region 527
S. Brahms, Raman Spectra of Bromoform Solution in Diethylamine 531
S. Chojnacki, R. Sosnowski, O. Wołczek, I. A. Yutlandov, H. Lancman and J. Żylicz, Internal Conversion Electrons of ^{167}Tu 535
A. Budzanowski, K. Grotowski, H. Niewodniczański and J. Nurzyński, The Polarization of Neutrons from the $^{12}C(d,n)^{13}N$ Reaction 583
H. Łożykowski and M. Rozwadowski, The Influence of Ultrasonics on the Electroluminescence of ZnS : Cu 651
A. Fryszman, On the Working Mechanism of Thin Layers in Pick-Up Tubes 733
B. Piekara, Electric and Magnetic Properties of Plasma of Low Power Pulse Discharges 741

LISTE DES AUTEURS DU VOLUME VII

Albrycht J. 11, 55
Altman M. 33, 37
Balcerzyk S. 141
Bauer R. 365
Bączyński A. 357
Bharucha-Reid A. T. 425, 561
Białynicki-Birula J. 77
Bittner R. 1
Bochenek K. 657
Bojarski B. W. 565
Brahms S. 449, 531
Budzanowski A. 583
Chlebowska D. 643
Chojnacki S. 535
Ciesielski Z. 227
Czajkowski M. 357
Czerwonko J. 639, 699
Deloff A. 521
Figielski T. 179
Fisz M. 221
Fort M. K. 51
Frąckowiak M. 295
Fryszman A. 733
Ganea T. 27
Gęba K. 187, 539
Glidman S. 373
Głowacki J. 301, 353
Granas A. . . 191, 271, 277, 387, 395, 539
Grotowski K. 583
Grzędzielski S. 627
Grzywacz J. 295
Heldt J. 295
Hulanicki A. 331
Ingarden R. S. 687
Jankiewicz C. 175, 409
Jankowski A. 539
Jaworowski J. W. 277
Karczewski B. 633
Kawski A. 355, 361
Kisyński J. 381
Kopeć Z. 99
Kreisel G. 621
Królikowska Z. 157
Królikowski W. 97, 237, 245, 691, 695, 725
Krzywicki A. 41
Krzyż J. 327
Krzyżański M. 131
Kuchowicz B. 85, 289, 509
Kurzweil J. 557
Lancman H. 535
Lewandowski Z. 261
Lukierski J. 577
Łopuszański J. 441
Łoś J. 13, 19
Łożykowski H. 651
Łukaszuk L. 515
Marczewski E. 611
Matuszewska W. 549
Maurin K. 151, 337, 461, 471
Meder J. 589
Mikusiński J. 669, 715
Milicer-Grużewska H. 593, 673, 719, 721
Mlak W. 653
Mostowski A. 401
Moszyńska B. 455
Moszyńska M. 601
Mrówka S. 703
Musielak J. 661
Nagy K. L. 93
Niewodniczański H. 583
Nurzyński J. 583
Olech C. 137, 319, 487
Opial Z. 71, 495
Orlicz W. 549, 661
Pacholczyk A. G. 429, 503, 681
Perkal J. 63
Piekara B. 741
Pogorzelski W. 57, 205, 311, 711
Pohoski R. 301
Polacka B. 353
Ratyński W. 527
Rayski J. 251
Robinson I. 351
Rolewicz S. 195
Rozwadowski M. 365, 651
Rudnicki K. 677

Ryll-Nardzewski C. 545
Rzewuski J. 93, 571
Sąsiada E. 23. 143, 145
Schinzel A. 307
Semadeni Z. 187
Shoenfield J. R. 405
Skwierz A. 361
Słowikowski W. 111, 119, 125
Sosnowski R. 535
Steinhaus H. 67
Stodółkiewicz J. S. 429, 503, 681
Suffczyński M. 169, 285
Szász A. 107, 369
Szeptycki P. 419
Szmielew W. 213
Szybiak A. 183
Szymański J. 435, 521, 643
Szymański Z. 233
Świerczkowski S. 501
Tammi O. 413
Trybuła S. 67, 267
Turán P. 481
Turkiewicz J. 527
Urbanik K. 343, 617
Waleryś H. 47
Wang Sheng-Wang 707
Włodarski L. 199
Wołczek O. 535
Wrzecionko J. 521
Yutlandov J. A. 535
Zaręba A. 255
Żelazko W. 201
Żuprański P. 527
Żylicz J. 535

ERRATA AU VOLUME VII

Page / Ligne	Au lieu de	Lire
120^{4}	into a d-group	into a closed d-group
120^{7}	into Y that g maps	into Y_3 g maps
130^{9}	S. MacLane	S. Eilenberg and S. MacLane
188^{2}	e_0	$T(e_0)$
$188_{4,12}$	non-negative	lattice-homomorphism
189_{2}	Roczniki	Zeszyty Naukowe
309^{4}	*Corollaire* 1	*Corollaire* 3
309^{18}	carrés > 0	carrés distincts
510^{4}	$(1+\alpha_A\|^2)$	$(1+\|\alpha_A\|^2)$
512^{5}	$[1+\gamma_6]$	$[1+\gamma_5]$
512_{13}	$(1+\|\alpha_A\|^2\|\int\vec{\sigma}\|^2$	$1+\|\alpha_A\|^2)\|\int\vec{\sigma}\|^2$
513_{7}	$N(E)=$	$N(E)dE=$
513_{2}	$b'=\dfrac{3Re[\ldots}{10\|C_A\|^2\ldots}$	$b'=\dfrac{2Re[\ldots}{\|C_A\|^2\ldots}$
513_{1}	$c'=\dfrac{3Re[\ldots}{10\|C_A\|^2\ldots}$	$c'=\dfrac{2Re[\ldots}{\|C_A\|^2\ldots}$
514_{6}	**1** (1959), 85.	**7** (1959), 85.

БЮЛЛЕТЕНЬ
ПОЛЬСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ, АСТРОНОМИЧЕСКИХ И ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

Резюме статей

ТОМ VII 1959 ВЫПУСК 12

С. МРУВКА, О МНОЖЕСТВАХ КВАЗИ-КОМПОНЕНТ . . стр. 703—705

В работе дается положительный ответ на следующую проблему Куратовского: можно ли класс всех квази-компонент множества A, лежащего в локально связном сепарабельном метрическом пространстве, представить в виде инвертированного предела классов компонент всех открытых супер-множеств множества A.

ВАНГ ШЕНГ-ВАНГ, ЗАМЕТКА О ПРОСТРАНСТВЕ МАРЦИНКЕВИЧА-ОРЛИЧА . . . . . стр. 707—710

В работе доказывается, между прочим, что пространство Марцинкевича-Орлича, нормированное согласно Степанову, является не-сепарабельным пространством Банаха. Кроме того, дается необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция, принадлежащая к этому пространству, обладала абсолютно непрерывной нормой.

В. ПОГОЖЕЛЬСКИЙ, СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРЕРЫВНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ ФУНКЦИЯМИ . . . . . стр. 711—714

Автор определил класс H_a^h и $H_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, состоящий из всех голоморфных или кусочно-голоморфных функций, граничные функции которых принадлежат к классу $\mathfrak{H}_a^h$ или $\mathfrak{H}_a^h(c_{k_1}, \ldots, c_{k_q})$, определенному в работе [1]. Кроме того, они удовлетворяют неравенству (3) вблизи точек разрыва $c_1, \ldots, c_p$ на краевых линиях L.

Свойство 1 говорит о том, что $H_{a_1}^{h_1} \supset H_a^h$, если $a \leqslant a_1$, $h_1 \leqslant h$. Свойство 2 касается выражения граничных функций формулами (4), (4′). Свойство 6 касается неравенства Гельдера (8), которому удовлетворяют граничные функции $\Phi(z)$, производные которых принадлежат к классу H_a^h. Свойства 8 и 9 касаются интегрального представления (10) и (11) голоморфных функций, аналогичного представлению интегральной формулы Векуа.

Ян МИКУСИНСКИЙ, ПРОСТОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ТИЧМАРКА О СВЕРТЫВАНИИ . . . . . стр. 715—717

В теореме Тичмарка говорится, что если $\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\,d\tau = 0$ в $[0, T]$, то $f = 0$ в $[0, t_1]$ и $g = 0$ в $[0, t_2]$, где $t_1 + t_2 \geqslant T$. Эту теорему легко доказать в особом случае: $f = g$.

В работе показан простой метод перехода от этого особого случая к теореме в общем виде.

Г. МИЛИЦЕР-ГРУЖЕВСКАЯ, ВТОРАЯ ТЕОРЕМА ОБ ОДНОЗНАЧНОСТИ РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ ГЕЛЬДЕРА . . . . . стр. 719—720

Приводится доказательство теоремы об однозначности решения параболической системы дифференциальных линейных уравнений с частными производными и с коэффициентами Гельдера в классе решений Z_1'.

Пусть M обозначает ряд системы N уравнений с N неизвестными функциями: $u_1(X, t), \ldots, u_N(X, t)$, $X = X(x_1, \ldots, x_n) \in E$, где E — евклидово пространство, t — положительное и ограниченное время, $0 \leqslant t \leqslant T$.

Класс Z_1' обозначает класс решений

$$[u_1(X, t), u_2(X, t), \ldots, u_N(X, t)],$$

удовлетворяющий следующим предположениям:

$$|D_X^S[u_\alpha(X, t)]| \leqslant \text{const}/t^{\mu_0}; \quad 0 < \mu_0 < 1$$

$$|D_t[u_\alpha(X, t)]| \leqslant \text{const}/t^{\mu_1}; \quad 0 < \mu_1 < 1$$

$$S = 0, 1, \ldots, M, \qquad \alpha = 1, \ldots, N,$$

причем в случае $S = M$ константы μ_0 и μ_1 не всегда произвольные. К этому классу принадлежат обобщенные интегралы Пуассона-Вейерштрасса.

Г. МИЛИЦЕР-ГРУЖЕВСКАЯ, ПРОБАБИЛИСТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ . . стр. 721—728

Доказывается, что суммы составляющих фундаментальных решений некоторой параболической системы линейных уравнений с частными производными второго порядка с коэффициентами, удовлетворяющими условию Гельдера, являются плотностями стохастических вероятностей.

В. КРУЛИКОВСКИЙ, О ВЕКТОРНЫХ БОЗОНАХ . . . . стр. 729—731

В работе содержится распространение формализма для элементарных частиц, предложенного ранее автором. Это распространение состоит в присоединении к формализму векторных бозонов, а именно: фотона и гипотетического заряженного бозона, который был бы посредником при слабых воздействиях.

А. ФРИШМАН, МЕХАНИЗМ ДЕЙСТВИЯ ТОНКИХ СЛОЕВ В ЭЛЕКТРОННО-ЛУЧЕВЫХ ТРУБКАХ . . . . . стр. 733—740

Используя дифференциальные уравнения в предположении изменяющегося линейно в зависимости от ускоряющего напряжения, коэффициента вторичной эмиссии $\sigma = \sigma(u)$, получено решение для механизма действия тонких слоев, периодически подвергающихся электронной бомбардировке.

Полученное уравнение содержит члены, описывающие переходный процесс. Рассмотрены случаи $\sigma > 1$ и $\sigma < 1$, а также случаи различного наклона характеристик вторичной эмиссии.

Выведенные уравнения позволяют интерпретировать работу приемных лучевых трубок при помощи физических параметров тонких слоев, а именно: $C, R, \sigma = \sigma(u)$.

Б. ПЕКАРА, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ ИМПУЛЬСА МАЛОЙ МОЩНОСТИ . . . . . стр. 741—744

Исследовано осевое распределение потенциала в трубе импульсных разрядов малой мощности осциллографическим методом, а также влияние поперечного и продольного магнитных полей на интенсивность излучения плазмы.

В первом случае получено $\partial V/\partial x = \text{const}$; во втором случае измерен эффект для поперечного магнитного поля (рост интенсивности света) и наблюдался противоположный эффект для импульсного продольного магнитного поля. Представлены спектры и осциллографические снимки формы импульса тока и интенсивности света.